

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)

Кафедра «Гидравлика, гидропневмоавтоматика и тепловые процессы»

Лекции по курсу

Экспериментальная гидромеханика судна

часть 2 – «Моделирование гидромеханики судна»

Составитель: доцент Полешкин М.С.

г. Ростов-на-Дону
2022 г.

Оглавление

Введение.....	5
1. Анализ современного состояние проблемы гидродинамического взаимодействия.....	9
1.1. Проблема гидродинамического взаимодействия	9
1.2. Силы и моменты, действующие на судно при его криволинейном движении	13
1.2.1. Классификация сил и моментов	14
1.2.2. Методы определения сил и моментов.....	17
1.3. Основные подходы к определению сил гидродинамического взаимодействия.....	20
2. Методы вычислительной гидродинамики в решении задач обтекания трехмерных объектов потоком вязкой несжимаемой жидкости	43
2.1. Постановка задачи обтекания системы тел потоком невязкой жидкости.....	43
2.2. Метод дискретных вихревых особенностей.....	45
2.3. Основные уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости	46
2.4. Основные подходы к моделированию турбулентных течений	50
2.4.1. Метод прямого численного моделирования	50
2.4.2. Метод решения осредненных по времени уравнений Навье-Стокса	52
2.4.3. Метод крупных вихрей.....	56
3. Общая характеристика коммерческих расчетных комплексов	58
3.1 Общая структура процесса решения инженерной задачи на основе методов вычислительной гидромеханики.....	61
3.2 Основная система уравнений	64
3.3 Дискретизация уравнений движения вязкой жидкости	65
3.4 Схемы аппроксимации уравнений переноса	70
3.5 Моделирование турбулентности в рамках RANS	74
3.6 Прямой расчет компонент тензора напряжений Рейнольдса	78
3.7 Моделирование влияния свободной поверхности жидкости	79
3.8 Алгоритм скользящих расчетных сеток.....	80
Список используемой литературы	88

Введение

Прогнозирование параметров управляемого движения судна можно отнести к одной из наиболее сложных задач корабельной гидродинамики. Это объясняется, прежде всего, сложным трехмерным характером вязких течений, возникающих при криволинейном движении судов, корпус которых имеет в общем случае сложную пространственную геометрию и развитую систему выступающих частей. Существенным в данном случае является также то, что маневрирование может выполняться в условиях разнообразных внешних воздействий (например, течений, морского волнения, и пр.) наличие границ акватории (дна акватории, стенок канала различных конфигураций) и др. Все выше сказанное приводит к существенному изменению сил и моментов, действующих на корпус судна и его элементы по сравнению с их значениями, определенными без учета приведенных факторов. Помимо внешних воздействий, связанных с параметрами потока и особенностями области маневрирования, особенное влияние может оказывать присутствие других морских объектов, находящихся в процессе движения, или же неподвижных.

С точки зрения практики судовождения, маневрирование судна в непосредственной близости от неподвижных или движущихся объектов, таких как морские сооружения различного назначения или других судов, требует наличия опыта и определенной квалификации судоводителя, с целью своевременного предупреждения и последующего избежания столкновения. Опасность столкновения значительно возрастает в случае, когда возникают дополнительные внешние воздействия в виде неблагоприятных погодных условий. Влияние окружающей среды, такое как волнение, ветровое воздействие, подводные течения проявляется в виде дополнительных динамических нагрузок, которыми невозможно пренебречь при анализе мореходных и маневренных качеств судна. В то же время происходит заметное ухудшение маневренных качеств судна в связи с дополнительными гидродинамическими силами и моментами, возникающими на корпусе в результате гидродинамического взаимодействия, возникающего при взаимодействии полей давления в жидкости, создаваемых корпусами судов в процессе движения. Указанные факторы формируют практически бесконечное число возможных условий для возникновения специфического взаимодействия судов. [1]. Сложение негативных факторов, влияющих на судно в указанных условиях, как правило носит непредсказуемый характер и задача судоводителя в данном случае не может считаться тривиальной.

В связи с повсеместным расширением флотов и растущими требованиями к судам, вопрос регулирования движения становится так же более острым и актуальным. С целью снижения эксплуатационных расходов и оптимизации работы судов в особых условиях, вопрос определения допол-

нительных гидродинамических сил и моментов, возникающих на корпусе судна, становится крайне важной задачей для современных исследований, так как обоснованные, качественные результаты позволят оптимизировать и возможно сократить количество существующих ограничений, учитывая условие соблюдения безопасности движения.

В то же время, степень изученности и комплексность проблемы гидродинамического взаимодействия судов в целом требует создания качественной и эффективной методологии определения параметров, управляющих взаимодействием как таковым. С целью предотвращения негативных эффектов и столкновений судов могут быть эффективны как уточнения к существующим, так и разработка совершенно новых рекомендаций и требований по управлению судном [2], в том числе рекомендации к проектированию портов и судоходных каналов. Предварительно, проблему гидродинамического воздействия можно условно разделить на несколько основных направлений:

- взаимодействие судна с твердой границей;
- непосредственно взаимодействие судов;
- влияние глубины фарватера – мелководье.

Приведенное разделение основывается на результатах наблюдений и анализе проведенных ранее теоретических исследований. Сложность, в данном случае, заключается в необходимости моделирования реальных задач морской практики, которые как правило, формируются при наличии нескольких влияющих факторов. Так, например, задача моделирования входа судна в порт подразумевает несколько этапов: моделирование взаимодействия судна с границами порта имеющих сложную пространственную конфигурацию; взаимодействие судна с подвижными и неподвижными судами в пределах порта при прохождении к месту стоянки; возможное влияние мелко- вода в связи с изменяющейся глубиной портовой зоны и, наконец, маневрирование вблизи границ порта в процессе швартования судна. Упрощающим условием здесь может стать протяженность процесса во времени: каждый из этапов маневрирования имеет свой временной отрезок, поэтому в данном случае допустимо предположение о том, что моделирование каждого из этапов может проводиться отдельно с целью оценки степени влияния каждого независимо и последующего сложения временных отрезков.

Эксплуатация судов показывает, что наиболее неблагоприятные условия вследствие гидродинамического взаимодействия чаще всего наблюдаются при встречном расхождении двух судов в каналах закрытого и открытого профилей. Обгонные движения судов в каналах, как правило, вовсе запрещаются или не рекомендуются [3]. В феврале 1998 года Агентство Морской Безопасности (MSA), выпустило Руководство "Опасности взаимодействия", предупреждая судовладельцев, капитанов, лоцманов и капитанов буксирных судов о необходимости принятия во внимание данной

проблемы с целью избежать неблагоприятных и критических ситуаций. Подобный свод правил, включающий руководства при различных условиях взаимодействия судов включен в [2].

Основной целью представленного исследования была разработка подхода к прогнозированию поведения судна в условиях обгонного движения. Для этого было проведено исследование качественного и количественного изменения возникающих на корпусе судна гидродинамических сил и моментов, а так же разработана методология практического применения полученных результатов в решении задач управляемости судов при обгоне.

Для практического решения проблемы взаимодействия судов эффективным может быть предварительное численное моделирование движения судна с целью определения гидродинамических сил и моментов на корпусе с учетом возникающего взаимодействия. В первую очередь, это позволит значительно сократить временные и финансовые затраты при известной степени адекватности полученных результатов. На сегодняшний день, возможности вычислительной гидродинамики (ВГД) или Computational Fluid Dynamics (CFD) в иностранной литературе, достаточно широко применяются инженерами и учеными для различных типов исследований в задачах проектирования и прогнозирования поведения различных физических сред.

Методы численной гидродинамики используют преимущества постоянно увеличивающейся мощности вычислительной техники, и их применение на сегодняшний день является наиболее перспективным направлением для учета не моделируемых в физическом эксперименте явлений, возникающих при обтекании корпуса судна вязкой жидкостью. Расчетные методы, вследствие их относительной дешевизны, не заменяя полностью модельный эксперимент, стали практически обязательным этапом при отработке обводов корпуса, существенно снизив необходимый объем экспериментальных исследований. Одновременно расчетные методы стали широко использоваться для пересчета полученных в эксперименте гидродинамических характеристик на натурные числа Рейнольдса [4]. В связи с вышесказанным, часть исследований была посвящена анализу возможности применения указанных методов в задачах гидродинамического взаимодействия.

Настоящая диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

В Главе 1 произведен анализ современного состояния проблемы, определены пути решения проблемы прогнозирования гидродинамического взаимодействия судов.

Глава 2 посвящена анализу современных средств вычислительной гидродинамики, обзору наиболее популярных моделей турбулентности, некоторых наиболее популярных численных схем.

В Главе 3 на примере идеализированного тела со сходными с корпусом судна параметрами производится оценка эффективности использования таких программных средств как Numeca

FINETM/Marine и CD Adapco STAR CCM+ для определения гидродинамических характеристик корпусов судов.

В Главе 4 рассмотрено гидродинамическое взаимодействие двух судов, произведены систематические численные эксперименты на основе избранных физических параметров.

В Главе 5 предлагается новая математическая модель гидродинамического взаимодействия двух судов, применимая на ранних стадиях проектирования и в системах имитационного моделирования.

Глава 1. Анализ современного состояние проблемы гидродинамического взаимодействия

1.1. Проблема гидродинамического взаимодействия

Из опыта мореплавания известно, что одной из наиболее аварийно опасных ситуаций является движение судов на малых траверзных расстояниях между ними, в связи с возникающим гидродинамическим взаимодействием. В литературе можно найти некоторые примеры аварийных ситуаций, которые имели место при движении в узкостях, каналах, и открытом море, как при непосредственной близости судов, так и на относительном удалении. Следует отметить наиболее очевидные примеры столкновений судов, в которых силы и моменты гидродинамического взаимодействия имели значительную или даже решающую роль [5]:

- столкновение судов "Olympic" и "Hawke", 1891 г: до столкновения суда находились на параллельных курсах и двигались в одном направлении. Судно "Hawke" отклонилось от заданного курса в направлении судна "Olympic", что привело к столкновению. В результате последующего анализа происшествия были сделаны предположения о возникшем взаимном влиянии судов, границ акватории, одновременно с негативным эффектом относительной скорости движения и схожести курсов. Данный инцидент положил начало изучения проблемы гидродинамического взаимодействия судов как физического феномена;
- опасный инцидент между судами "Titanic" и "New York", 1912 г: при выходе из порта Саутгемптон, судно "Titanic" спровоцировало опасную ситуацию. В процессе прохождения в непосредственной близости от двух небольших пассажирских судов, стоявших на якоре, одно из них ("New York"), освободилось от якорных связей и направилось в сторону пассажирского судна "Titanic". Исключительно благодаря оперативной работе портового буксира столкновение было предотвращено;
- гибель судна "Cunaca" при столкновении с пассажирским судном "Queen Mary", 1942 г.: в ходе Второй Мировой войны, судно "Queen Mary" использовалось для перевозки военных грузов и солдат. До момента столкновения, суда имели приблизительно равные скорости движения, судно "Queen Mary" выполняло маневр «зигзаг» в условиях неограниченного фарватера. Произошедшее столкновение, в результате которого судно "Queen Mary" протаранило "Cunaca", привело к гибели последнего. Последующее воспроизведение условий крушения показало, что влияние судна больших размеров привело к смене направления движения "Queen Mary", учитывая незначительное расстояние между судами в первоначальный момент маневра. Дальнейшие исследования так же выявили высокую степень зависимости характера взаимодействия от размеров и относительных скоростей движения вовлеченных судов;

- столкновение "HMS Nelson" со стенкой гидротехнического сооружения порта г. Портсмут, 1945 г: при выходе из порта Портсмут, судно "HMS Nelson" отклонилось от заданного курса в сторону правого борта и на полном ходу столкнулось с подводной частью сооружения "Хаслар". Последующее моделирование и анализ столкновения выявили наличие сильного влияния границ акватории на гидродинамические характеристики (ГДХ) судна, и позволили впервые получить официально опубликованные данные о значимости влияния наклонной границы на маневренные качества судна;

- катастрофа "Roystone Grange" и "Tien Chee", 2012 г.: танкер "Tien Chee " в полном грузу двигался практически по средней линии судоходного канала. Судно "Roystone Grange " в то же время двигалось навстречу на более высокой скорости. С целью обеспечения безопасного расхождения, рулевой судна "Roystone Grange " переложил руль на правый борт. В результате ошибочного суждения, а так же в связи со значительным влиянием границы береговой линии, произошло столкновение. Суда загорелись, что привело к человеческим жертвам. Последовавшее расследование указало на важность учета степени влияния скорости движения в любом из вариантов взаимодействия судов, одновременно с необходимостью учета влияния границ области движения. Более того, именно эта катастрофа спровоцировала более интенсивное возобновление исследований и разработок в области проблемы гидродинамического взаимодействия судов.

Из приведенных выше примеров можно сделать вывод о том, что ряд факторов, и их возможное сложение, приводят к практически непредсказуемому поведению судна в условиях взаимодействия, так как в зависимости от конкретного сложения влияющих условий, характер взаимодействия может определяться разными доминантными параметрами. Так, в процессе обгонного движения критическими могут быть как соотношения основных размеров судов, скоростей движения, так и расстояния между ними [6].

Изученные результаты общих теоретических и экспериментальных исследований, в том числе данных некоторых натурных наблюдений, позволяют предварительно судить о следующем:

- случай обгонного движения является более опасным, чем встречное расхождение при прочих равных условиях, так как гидродинамические силы и моменты, возникающие на корпусе судна при обгоне, значительно по своим абсолютным значениям;
- при практически равных расстояниях между бортами судов в случае обгона и встречном расхождении при одинаковых значениях скоростей движения, максимальные значения возникающих сил и моментов, при обгоне превышают в 2-7 раз значения при встречном расхождении. В

случае обгона максимальная поперечная сила стремится сблизить корпуса судов, а возникающий при этом момент разворачивает носовую оконечность обгоняющего судна в сторону обгоняемого судна;

- при встречном расхождении поперечные силы в большинстве случаев приводят к расталкиванию судов и максимальный по абсолютной величине момент, как правило, приводит к отворачиванию судов;
- натурные испытания показали, что в случае обгона, особенно на малых глубинах, суда неоднократно наваливались друг на друга, несмотря на действия судоводителей, даже при довольно значительных траверзных расстояниях между судами (при траверзных расстояниях от 2 до 5 ширин меньшего судна);
- при встречных расхождениях на различных глубинах, с разными скоростями движения и при траверзных расстояниях от 0,75 до одной ширины меньшего судна не наблюдались случаи, когда гидродинамические силы способствовали созданию аварийной ситуации. Практически, в процессе встречных расхождений силы и моменты не препятствуют безопасному расхождению судов в отличие от случаев обгона. В подавляющем большинстве случаев момент гидродинамических сил, возникающий при обгонном движении судна, достигает максимального значения, когда мидель обгоняющего судна находится примерно на траверзе кормы обгоняемого. При этом момент стремится развернуть обгоняющее судно в сторону обгоняемого, а момент, действующий на обгоняемое судно, стремится развернуть его кормовую оконечность в сторону обгоняющего.
- Предшествующие экспериментальные данные и результаты расчетов других авторов, проводивших исследования по рассматриваемой тематике [7-27], показывают, что как при обгоне, так и при расхождении, наибольшей опасности подвергается судно меньших размеров. Наличие угла дрейфа у взаимодействующих судов незначительно влияет на величину гидродинамических сил, в то время как момент значительно возрастает. Наибольшее значение силы и моментов отмечается при движении с приблизительно равными скоростями, наиболее заметное увеличение наблюдается при обгоне [7].

Все вышеперечисленные явления проявляются в более значительной степени в условиях ограниченного фарватера или на мелководье. Возрастание сил и моментов при гидродинамическом взаимодействии судов на малых глубинах в практических рекомендациях предлагается учитывать введением коэффициента, характеризующего степень влияния мелководья, что несомненно является спорным в связи с возникающим в процессе большим количеством нестационарных эффектов. На мелководье судно плохо реагирует на изменения угла поворота руля, а скорость движения мо-

жет значительно снизиться. Изменение глубины фарватера приводит к сильной рыскливости судна, а при резком изменении глубины судно начинает рыскать носом в сторону большей глубины. При движении судна в ограниченном фарватере, возникает явление присасывания, возникающее вследствие взаимодействия гидродинамических полей судов, движущихся в непосредственной близости друг от друга, а также в результате влияния течений, ширины фарватера и мелководья. Явление присасывания особенно проявляется при обгоне одного судна другим, при подходе судна к месту стоянки другого судна, при проходе опор мостов, на реках с большим течением. Присасывание, являющееся следствием неравномерного поля давления вокруг корпуса судна и вызываемого им волнения, возрастает с ростом скорости и уменьшением расстояния между судами.

При прохождении узкостей скорость судна уменьшается до 25—30% от первоначальной, снижается поворотливость и увеличивается рыскливость. Последнее приводит к потерям эксплуатационного времени (удлинению времени перехода) до 5—6% при движении в сложных условиях и затрате дополнительного топлива на переход.

Значимость такого негативного влияния требует учитывать возможные эффекты в процессе проектирования судна и определения эксплуатационных характеристик каналов с целью обеспечения безопасности движения судов. Исследования такого влияния уже проводились ранее [28], но, как правило, данные исследования ограничивались изучением вертикальной стенки, пересекающей свободную поверхность, или же были ограничены в количестве варьируемых параметров моделируемого движения.

Экспериментальные исследования проводились в основном с целью получения дополнительной информации о влиянии параметров стенки (наклон, степень погружения в воду, расположение относительно траектории движения судна), при изменении таких основных параметров как глубина бассейна, скорость движения, форма корпуса судна. Полученные авторами результаты могут быть использованы при проектировании морских каналов, или же в качестве исходных данных для численного моделирования задач движения судна в ограниченном фарватере [28].

Натурные наблюдения так же показывают, что при обгоне судов на малых глубинах, в условиях ограниченного фарватера на скоростях, близких к критическим, если расстояние между бортами судов мало, $(1,0 \div 2,0B_1)$ даже остановка двигателя не позволит избежать столкновения. В этом случае судно и после остановки двигателя будет двигаться с прежней скоростью, находясь за кормой обгоняемого судна на его кормовой волне ('этот эффект судоводители называют «сесть на волну»'). Поэтому в условиях мелководья безопасное расстояние между судами должно быть не менее $7B_1$, где B_1 – ширина меньшего судна. На глубокой воде гидродинамическое взаимодействие практически не влияет на управление судами при расстоянии более $4B_1$. Поскольку в узкостях суда

расходятся на малых траверзных расстояниях, независимо от того, при обгоне или при расхождении, необходимым условием считается соблюдение расстояния между судами не менее трех длин судна ($3B_l$) и снижение скорости [6]. Однако не всегда подобные условия доступны для соблюдения.

Рекомендации PIANC WG30, приведенные в работе [29], используются для оценки безопасных расстояний для определенных диапазонов скоростей.

Таблица 1. Дополнительное расстояние для двустороннего движения согласно рекомендациям PIANC WG30 [29].

	Выход из канала в море	Канал
Скорость движения	Расстояние между судами	
>12уз	2.0В	-
8-12 уз	1.6В	1.4В
5-8 уз	1.2В	1.0В
Плотность движения	Дополнительное расстояние	
0-1 судно/час	0.0В	0.0В
0-1 судно/час	0.2В	0.2В
0-1 судно/час	0.5В	0.4В

В случае обгонного движения указанные в Табл.1 значения следует увеличить в 2 раза согласно тем же рекомендациям.

Приведенные примеры показывают насколько схематична и условна приведенная картина взаимодействия, что позволяет говорить о наиболее вероятном не полном соответствии реальных условий, с которыми судоводитель сталкивается при управлении судном. Так же некоторые предположения, являющиеся затруднительными для натурных наблюдений, не получили однозначного подтверждения по результатам экспериментальных исследований, так как связаны с реакциями подводной части судна на изменения окружающей среды и возникающими масштабными эффектами.

1.2. Силы и моменты, действующие на судно при его криволинейном движении

В процессе изучения проблемы гидродинамического взаимодействия судов одним из основополагающих этапов является определение сил и моментов, действующих на корпуса судна при его движении. Следующие параграфы содержат описание классического подхода к разделению сил и моментов на составляющие в зависимости от природы их возникновения и краткий обзор подходов к их определению. С данной точки зрения, гидродинамические силы и моменты возникающие при взаимодействии могут рассматриваться как дополнительная составляющая общей силы и момента.

1.2.1. Классификация сил и моментов

Традиционно [103-106] для вывода уравнений движения судна применяется подход, основанный на использовании уравнений Лагранжа, при начальных условиях идеальной жидкости без учета деформаций свободной поверхности [107]. Кинетическую энергию жидкости в этом случае удастся выразить такой же квадратичной формой от линейных и угловых скоростей движения объекта, как и кинетическую энергию масс самого объекта; а в составе внешних сил, учитывающих влияние окружающей жидкости, рассматриваются только силы неинерционной природы. Такой подход в итоге приводит к понятию присоединенных масс, физический смысл которых не представляется совершенно прозрачным. Вполне возможен также учет инерции жидкости в правых частях уравнений, т.к. судно находится под действием активных сил (например, силы от движительно-рулевого комплекса) и реактивных сил окружающей его жидкости (как гидродинамических, так и инерционных) [107, 108]. Подобный путь вывода уравнений использовался в частности Д.В. Никущенко [67] в решении задач моделирования движения подводных аппаратов. Такой подход может быть так же использован в решении задач движения судна.

Для определения свойств управляемого движения судна необходимо знание сил и моментов, действующих на корпус судна при его движении по произвольной криволинейной траектории. При этом, движение судна может быть как установившимся, так и не установившимся.

Уравнения Лагранжа позволяют описывать движение любой механической системы. Для этого, однако, необходимо задание функции Лагранжа. В случае движения судна ее достаточно трудно найти, так как искомая функция Лагранжа должна учитывать взаимодействие между судном и окружающей его средой. Чтобы обойти эту проблему данное взаимодействие принято разделять на несколько более простых. При этом в рассмотрение вводятся лишь те силы и моменты, зависящие от кинематических параметров движения, которые обусловлены собственной инерцией судна и инерцией жидкости, вовлеченной в движение в результате действия гидродинамических давлений, индуцированных судном. Все остальные силы и моменты являются внешними потенциальными силами, обусловленными наличием вязкого трения между водой и поверхностью корпуса, влиянием свободной поверхности, силами и моментами, создаваемыми движительно-рулевым комплексом и иных, вводимых в специальных случаях.

Отсюда получается шесть уравнений, характеризующих баланс сил и моментов, действующих на рассматриваемый объект.

Уравнение Лагранжа для дальнейшего переписывается в связанной системе координат, что приводит к следующей системе в индексной форме записи [30]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{dT}{d\vec{v}} + \vec{\omega} \times \frac{dT}{d\vec{v}} = \vec{R}^e \\ \frac{d}{dt} \frac{dT}{d\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \frac{dT}{d\vec{\omega}} + \vec{v} \times \frac{dT}{d\vec{v}} = \vec{M}^e \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь разложение для поступательной скорости $\vec{v} = \vec{e}_j v_j$ по базису \vec{e} в связанной системе координат, $i, j=1, 2, 3$ (по правилу суммирования по повторяющемуся индексу), $\vec{\omega} = \vec{e}_j \omega_j$ угловая скорость вращения судна относительно соответствующей оси.

В этих уравнениях произведено разделение усилий, действующих на судно: в левых частях находятся те их составляющие, которые содержат производные по времени и скоростям, правые части – это главный вектор и главный момент сил неинерционной природы, которые являются функциями, прежде всего, углов атаки и дрейфа, угловой скорости, чисел Фруда и Рейнольдса.

Полученные уравнения характеризуют движение неуправляемого объекта, поэтому должны быть дополнены законом управления, например, законом перекладки рулей во времени $\delta = \delta(t)$. Помимо перекладки рулей управляющими воздействиями могут также являться изменение частоты вращения гребных винтов $n(t)$ и их шагового отношения $P/D(t)$, режим работы подруливающего устройства.

Левые части уравнений (1.1) называют инерционными силами и моментами. Силы и моменты, входящие в правые части уравнений, принято разделять на массовые, реактивные и вязкостные:

$$R_i = R_i^B + R_i^P + R_i^T, \quad (1.2)$$

$$M_i = M_i^B + M_i^P + M_i^T,$$

где R_i и M_i - проекции на i -ю ось связанной системы координат сил и моментов вязкостной природы, массовых и реактивных.

Реактивная сила, развиваемая движителем, является одной из основных сил, действующих на судно при его движении. Кроме того, влияние движителя на обтекание корпуса судна приводит к возникновению силы засасывания, которая увеличивает силу сопротивления воды.

Силы и моменты вязкостной природы, действующие на корпус судна при криволинейном движении, являются функциями угла атаки и дрейфа, угловой скорости его вращения относительно центра тяжести, угла перекладки руля, числа Рейнольдса (характеризующего режим течения жидкости вблизи судна) и формы корпуса. В общем случае эти зависимости являются нелинейными.

При решении задачи об определении ГДХ подводной части корпуса судна, последние представляют в виде разложения в ряд Тейлора. В общем случае силы и моменты записывают в виде сумм [31-33]:

$$\overline{R}^B = \left(\overline{R}^B\right)^{\alpha,\beta} + \left(\overline{R}^B\right)^{\overline{\omega}}, \quad \overline{M}^B = \left(\overline{M}^B\right)^{\alpha,\beta} + \left(\overline{M}^B\right)^{\overline{\omega}}.$$

Первые составляющие, которые называются позиционными, зависят от углов атаки и дрейфа, вторые зависят от угловой скорости и называются вращательными. Вводя понятие коэффициентов сил и моментов, эти выражения в проекциях на оси связанной системы координат можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{R_i}{\frac{\rho v^2}{2} S} = c_i^0 + c_i^\alpha \alpha + c_i^\beta \beta + c_i^{\beta\beta} \beta|\beta| + c_i^{\omega_j} \omega_j \\ m_i &= \frac{M_i}{\frac{\rho v^2}{2} Sl} = m_i^0 + m_i^\alpha \alpha + m_i^\beta \beta + m_i^{\beta\beta} \beta|\beta| + m_i^{\omega_j} \omega_j \end{aligned} \quad (1.3)$$

В этих выражениях α и β - углы атаки и дрейфа соответственно; ω - угловая скорость вращения судна вокруг соответствующей оси вращения; S, l - характерные значения площади и линейного размера судна; c_i^0 и m_i^0 - проекции сил и моментов при нулевом значении угла атаки и дрейфа;

$$c_i^\mu = \frac{\partial c}{\partial \mu}; \mu = \{\alpha, \beta, \omega, \delta\}; i = \{x, y, z\}.$$

Позиционные составляющие определяются при различных значениях углов атаки, либо в результате испытаний моделей в аэродинамических трубах, либо рассчитываются с помощью известных методов динамики невязкой жидкости, в частности, методов дискретных вихревых особенностей (панельных методов).

Теоретическое определение вращательных составляющих сопряжено со значительными трудностями и не всегда дает удовлетворительные результаты, поэтому основным способом их получения на сегодняшний день является экспериментальный. Это осуществимо с помощью испытаний искривленных моделей, применения ротативных установок или методом малых колебаний.

Отличия полученных экспериментальных данных для модели от соответствующих натурных значений может быть связано с влиянием гребных винтов, влиянием масштабного эффекта, влиянием попутного потока.

Силы инерционной природы обусловлены инерцией массы корпуса судна и окружающей его жидкости. Для их определения рассчитывают кинетическую энергию судна, которая складывается из кинетической энергии корпуса как твердого тела и той ее доли, которая тратится судном на вовлечение в движение окружающей его жидкости и определяется по следующей формуле:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(m v_i^2 + \sum_j^3 (-1)^\mu I_{ij} \omega_i \omega_j \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \sum_{l=1}^6 \lambda_{kl} v_k v_l$$

где v_i - проекция скорости движения центра тяжести судна на оси связанной системы координат;

I_{ij} - моменты инерции корпуса судна; $i, j = \{x, y, z\}$; $\mu = 0$ при $i = j$ и $\mu = 1$ при $i \neq j$; ω_{ij} -

угловые скорости ее вращения; λ_{kl} - обобщенные присоединенные массы; $k, l = \{x, y, z, x, y, z\}$;

$v_{k,l}$ - обобщенные скорости движения жидкости.

При практических расчетах динамики судна используются безразмерные значения присоединенных масс – коэффициенты присоединенных масс, определяемые, например, следующим образом [30, 31]:

$$k_{ii} = \frac{\lambda_{ii}}{m} - \text{имеют размерность массы; } i = j = 1, 2, 5;$$

$$k_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{mL} - \text{имеют размерность статического момента; } i = 1, 2, 9; j = 4, 5, 6;$$

$$k_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{I_{ij}} - \text{имеют размерность момента инерции; } i = j = 4, 5, 6.$$

При движении судов на близком расстоянии друг от друга наряду с появлением сил гидродинамического взаимодействия происходит также изменение присоединенных масс корпусов по сравнению с движением в безграничной жидкости. Известные методы, позволяющие учесть изменение присоединенных масс, относятся к случаю движения эллипсоида вблизи твердой стенки. Результаты теоретических исследований показывают, что присоединенный момент инерции и присоединенные массы возрастают по сравнению с движением в безграничной жидкости. При движении двух судов величины присоединенных масс и момента инерции будут зависеть от относительного положения в продольном и поперечном направлении, и в отличие от случая движения одного судна – будут носить нестационарный характер. Известно, что при траверзном расстоянии 1.5 ширины (В) одного из судов, общее изменение инерции корпуса с учетом массы судна не превышает 10%. В расчетах обгонов и встречных расхождений судов таким изменением присоединенных масс и момента можно пренебречь [35].

1.2.2. Методы определения сил и моментов

Традиционным и наиболее надежным способом определения ГДХ корпуса судна является эксперимент, но экспериментальные исследования не всегда дают исчерпывающую информацию и имеют ряд особенностей.

Теоретические методы, из-за недостаточно развитого математического аппарата, также не всегда приемлемы, в последнее время в силу динамичного развития вычислительной техники все большую популярность приобретают численные методы. Их можно рассматривать, как наиболее перспективный подход для определения ГДХ.

Гидроаэродинамический эксперимент позволяет решать очень широкий круг вопросов, связанных с взаимодействием тел с различными средами. При этом в широком диапазоне могут меняться как параметры среды, так и параметры движения тела. Однако из-за невозможности проведения эксперимента для больших объектов, приходится проводить исследования на геометрически подобных моделях. При этом возникают погрешности при пересчете результатов на натурный объект, в связи с невозможностью выполнения всех динамических критериев подобия.

Для теоретического определения гидродинамических сил вязкостной природы, действующих на корпус корабля при его обтекании жидкостью под углами дрейфа К.К. Федяевский [33] и Г.В. Соболев предложили простой метод, основанный на циркуляционно-отрывной теории, разработанной Г. Алленом для анализа сил, действующих на тела вращения [35].

Суть метода заключается в том, что поперечная гидродинамическая нагрузка на корпусе корабля представляется в виде двух составляющих:

1. сосредоточенной силы у форштевня, обусловленной наличием несущих вихрей в носовой оконечности с вертикальными осями (циркуляционной);
2. равномерно распределенной нагрузки от сопротивления поперечному обтеканию в плоскостях шпангоутов, сопровождаемым сходом вихрей с горизонтальными осями вращения с внутреннего по отношению к дрейфу борту судна (отрывной).

Для определения величин коэффициентов силы и момента для первой составляющей дублированный корпус судна рассматривается как крыло предельно малого удлинения. Тогда действующая на него нагрузка при движении с достаточно умеренным углом дрейфа меняется практически линейно, и может быть записана в следующем виде:

$$C_{y_e} \approx C_y^{\beta} \beta, \quad m_z \approx m_z^{\beta} \beta \quad (1.4)$$

Вторая группа составляющих нагрузки обусловлена отрывным поперечным обтеканием дублированного корпуса, и для них можно записать:

$$C_{y_e} \approx C_y^{\beta\beta} \beta |\beta| \quad (1.5)$$

Очевидно, что коэффициент момента при этом равен нулю.

Принимая во внимание также вращение судна, гидродинамические силы на его корпусе определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} C_y &= C_y^\beta \beta + C_y^{\beta\beta} \beta |\beta|, \\ m_z &= m_z^\beta \beta + m_z^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z \end{aligned} \quad (1.6)$$

Коэффициенты производных записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} C_y^\beta &= \frac{1}{2} k \pi \lambda, & C_y^{\beta\beta} &= \frac{1,3}{\beta_i} - 0,22 \frac{B}{T}, \\ m_z^\beta &= k \frac{\pi \lambda}{4} \left(\frac{8 \mu \phi}{k \pi} - 1 \right), & m_z^{\bar{\omega}_z} &= \frac{1}{8} k \pi \lambda. \end{aligned} \quad (1.7)$$

где k - эмпирический коэффициент, учитывающий влияние кормовых обводов на величину вихревых образований; $\lambda = 2T \downarrow$ - относительное удлинение корпуса, как крыла малого удлинения; β_i - коэффициент полноты площади мидель – шпангоута; μ - отношение коэффициента присоединенной инерции к значению для эквивалентного эллипсоида; $\phi = V / LBT$ - коэффициент полноты объемного водоизмещения судна; $\bar{\omega}_z = \frac{\omega_z L}{U}$ - безразмерная угловая скорость вращения корпуса судна.

В свете интенсивного развития вычислительной техники все чаще для получения информации об исследуемых объектах, как альтернатива эксперименту, используются численные методы [36]. Это обусловлено рядом преимуществ численных методов над экспериментальными, в частности:

1. время предварительной подготовки для проведения численного эксперимента в ряде случаев значительно меньше времени, требуемого для проведения эксперимента в лабораторных условиях;
2. численные методы позволяют моделировать условия течения, не воспроизводимые при экспериментальных испытаниях на моделях;
3. численные методы позволяют получить более широкую и подробную информацию;
4. стоимостная эффективность экспериментов на основе численных методов по сравнению с экспериментальными методами в лабораториях непрерывно повышается;

Численные методы можно разделить на две группы. Первая из них основана на гипотезе об отсутствии вязкости, методы второй группы не используют эту гипотезу.

Численные методы, основанные на допущении о невязкости жидкости также можно разделить на две подгруппы: прямое решение уравнений Эйлера и методы гидродинамических особенностей, к которым, в частности, можно отнести метод дискретных вихрей. Метод решения уравнений Эйлера не нашел широкого применения, так как обладает рядом недостатков. К ним можно отнести то, что этот метод не имеет вычислительных преимуществ перед решением задач в полной постановке.

Для решения задач вязкой жидкости различают три основных подхода: прямое численное моделирование (DNS, Direct Numerical Simulation), метод крупных вихрей (LES, Large Eddy Simulation) и решение осредненных по времени уравнений Навье-Стокса (RANS, Reynolds-averaged Navier-Stokes). Первый основан на прямом решении уравнений Навье-Стокса без привлечения дополнительных уравнений и функций. Два других используют преобразование уравнений Навье-Стокса, в результате которого отбрасываются мелкомасштабные турбулентные пульсации.

Также существует ряд гибридных подходов для решения задач вязкой жидкости. К ним можно отнести такие методы, как метод отсоединенных вихрей (DES, Detached Eddy Simulation), URANS (Unsteady Reynolds-averaged Navier-Stokes).

1.3. Основные подходы к определению сил гидродинамического взаимодействия

С точки зрения практики обеспечения безопасности движения, вопрос гидродинамического взаимодействия судов на сегодняшний день освещен достаточно поверхностно, и выводы, основанные на результатах доступных теоретических и экспериментальных исследований, применимы, как правило, для ограниченного числа задач. Постановка модельного эксперимента, как наиболее надежного метода получения информации о силах и моментах на корпусе судна, для задач, например, встречного расхождения или обгонного движения при разности в скоростях, требует специального дорогостоящего оборудования для опытовых бассейнов и разработки специальных методов по определению гидродинамических сил, действующих на модели судов при нестационарном движении. Это является сложной самостоятельной задачей. В связи с вышесказанным, число экспериментальных исследований ограничено как в отечественной практике, так и за рубежом [21].

Математические модели гидродинамического взаимодействия судов имеют несколько разрозненный характер и не позволяют моделировать силы и моменты на корпусе судна с учетом всех значимых параметров. В связи с этим общие правила по обеспечению безопасности движения судов, как и учебная литература для судоводителей, несут достаточно рекомендательный характер, и используют, как правило, упрощенные эмпирические зависимости, для приблизительной оценки значений возникающих эффектов. При этом, в некоторых источниках гидродинамическое взаимодействие судов называется “явлением взаимного притяжения” или “присасыванием”, что не является достаточным определением, так как возникающие гидродинамические силы и моменты меняют свой знак в процессе взаимодействия, то есть наблюдается не только “взаимное притяжение”, но и “расталкивание” судов.

При математическом описании движения судна в общем случае авторы неизбежно сталкиваются с двумя главными проблемами: ограниченностью информации о геометрических характеристиках и маневренных качествах судов, с одной стороны, и отсутствием или ограниченностью информации о гидродинамических силах и моментах с другой. Если решение первой проблемы, хотя и сопряжено с определенными трудностями, но принципиально возможно, то данные о величинах и характере изменения гидродинамических сил и моментов могут просто отсутствовать по причине сложности и малой изученности явления. С комплексом подобных проблем, сталкиваются и при описании движения судна в стесненной акватории.

Несмотря на то, что решением отдельных задач, определяющих движение судна в условиях стесненной акватории, занимаются достаточно длительный период времени исследователи разных стран, проблема до сих пор не потеряла актуальности, так как приемлемого математического описания по-прежнему не существует. Это обусловлено сложностью формы судового корпуса и большим числом кинематических параметров, определяющих значения сил и моментов.

В последние годы за рубежом создано несколько новых экспериментальных установок и проведена автоматизация эксперимента с целью определения новых данных, позволивших пока лишь расширить представление о свойствах гидродинамических сил и моментов, возникающих при движении вблизи стенок канала различного профиля, при совместном маневрировании судов и др. [7].

Изначально, возникновение взаимодействия судов на основе гидродинамических эффектов может быть спровоцировано множеством факторов. Само понятие “непосредственной близости”, часто встречающееся в описании взаимодействующих объектов, так же не доопределено и нуждается в обосновании, так как необходимо введение ограничения минимального расстояния в различных ситуациях взаимодействия, обеспечивающего безопасность движения судов.

Значительное натурное исследование было проведено в 1965 г. Ю.М. Мاستушкиным. Автор провел испытания, в ходе которых измерялись скорости судов, глубина фарватера (H), расстояния между диаметрными плоскостями (h) и миделями судов (m). Числа Фруда варьировались в диапазоне $Fr=0,1 \dots 0,37$; отношение глубины к осадке судна $H/T_{cp} = 1,5 \dots 10,0$. Продольные и поперечные расстояния для случая обгона изменяли в широком диапазоне в зависимости от участвовавших в испытаниях судов-партнеров (основное судно, судно-цель). Подробно результаты указанных натурных наблюдений приводятся в Главе 4, и служат основой для оценки качественной картины полученных результатов.

Изученная литература в области теоретических исследований, в целом может быть разделена на основные группы по характеру предлагаемых исследований и их содержанию:

1. К первой можно отнести результаты сравнительного анализа экспериментальных исследований и теоретических методов. Они позволяют собрать достаточно точные данные о поведении судна и возникающих силах и моментах на корпусе судна. Результаты данной группы исследований позволяют проводить тестирование и обоснование результатов последующих численных экспериментов. Однако, существенным ограничением здесь является требование полноценного моделирования условий взаимодействия: практически бесконечное число возможных ситуаций взаимодействия судов в реальных условиях должно быть воспроизведено в условиях опытового бассейна. Таким образом это приводит к бесчисленному количеству экспериментальных постановок или же необходимости экстраполяции полученных результатов, что не всегда является надежным решением. Помимо этого, само экспериментальное исследование требует значительного времени и финансовых затрат на подготовку и проведение.
2. Ко второй основной группе можно отнести результаты, полученные с помощью численных методов на основе теоретических подходов. В целом, данная группа представляет результаты математического моделирования с учетом различных упрощений, чаще всего таких как потенциальность течения, при отсутствии вихреобразования, в частности, метода дублированного корпуса.

Приведенные подходы являются наиболее исследованными на данный момент. Так же зачастую материалы данной группы исследований включают эмпирические зависимости, полученные путем теоретических изысканий или же анализа практических наблюдений.

Исследования на основе моделей и методов ВГД (CFD) следует выделить в отдельную группу. На сегодняшний день они составляют наиболее малочисленную, но в то же время перспективную группу. Следует отметить, что методы ВГД обладают рядом преимуществ, которые при отсутствии достоверных данных о гидродинамических характеристиках объекта могут стать особенно актуальны. К числу таких преимуществ можно отнести [37]:

- возможность оперативного получения практически всей гидродинамической информации с учетом всех определяющих факторов без привлечения экспериментальных данных;
- возможность исследования физических свойств и структуры течений с предсказанием таких явлений, как нелинейные эффекты, отрыв потока и др.;
- возможность проведения серийных расчетов; учет физических свойств объекта и гидрофизических условий плавания;
- перспективность, связанная с постоянным развитием математических моделей, численных методов и ростом производительности вычислительной техники.

Подробное описание наиболее широко применяемых методов и моделей вычислительной гидродинамики приведено в Главе 2.

Так, с точки зрения научного исследования проблема гидродинамического взаимодействия была поставлена и определена впервые в ходе одного из первых успешных экспериментов Р.Н. Ньютона (R.N. Newton, 1860)[17], который выявил само явление взаимодействия при обгонном движении в процессе проведения модельных испытаний на глубокой воде.

Попытки провести экспериментальные исследования возникающих на корпусе судна сил и моментов возобновляются в работах ученых и исследователей 1900 гг. В. Данд (W. Dand, 1981) [8] провел обширное исследование основных параметров взаимодействия в ходе экспериментальных исследований движения двух судов на параллельных курсах при встречном и обгонном движениях. Основные размеры судов имели сходные значения ($L_1/L_2=1.192$; $B_1/B_2=0.01$; $T_1/T_2=0.128$), число Фруда по глубине принимало следующие значения: $Fr_{h1}=0.25$, $Fr_{h2}=0.41$. Расстояние между судами составляло 1.6 ширины (B) наибольшего. Позднее, Д. В. Тейлором (D. W. Taylor, 1909) [37] на основе экспериментальных исследований было дано общее определение возникающей силы присасывания, провоцирующей изменение первоначального направления движения судна и способствующей развороту судов по направлению друг к другу. Данное исследование было направлено уже в сторону получения количественной оценки и ограничивалось рассмотрением двух типов моделей.

Следующие существенные результаты были получены уже во второй половине XX века. Е. Мюллер (E. Muller, 1967) [16] изучал взаимодействие в ходе обгона и расхождения судов в узком канале, Д.Ф.М. Ремери (G.F.M. Remery, 1974) [18] исследовал возникающие силы на корпусе судна, стоящего на якоре, при прохождении судна в непосредственной близости от него.

На Рис. 1 приведена упрощенная картина характера изменения сил и моментов гидродинамического взаимодействия для случая, когда судно меньших размеров обгоняет судно больших размеров полученная в рамках исследования [38].

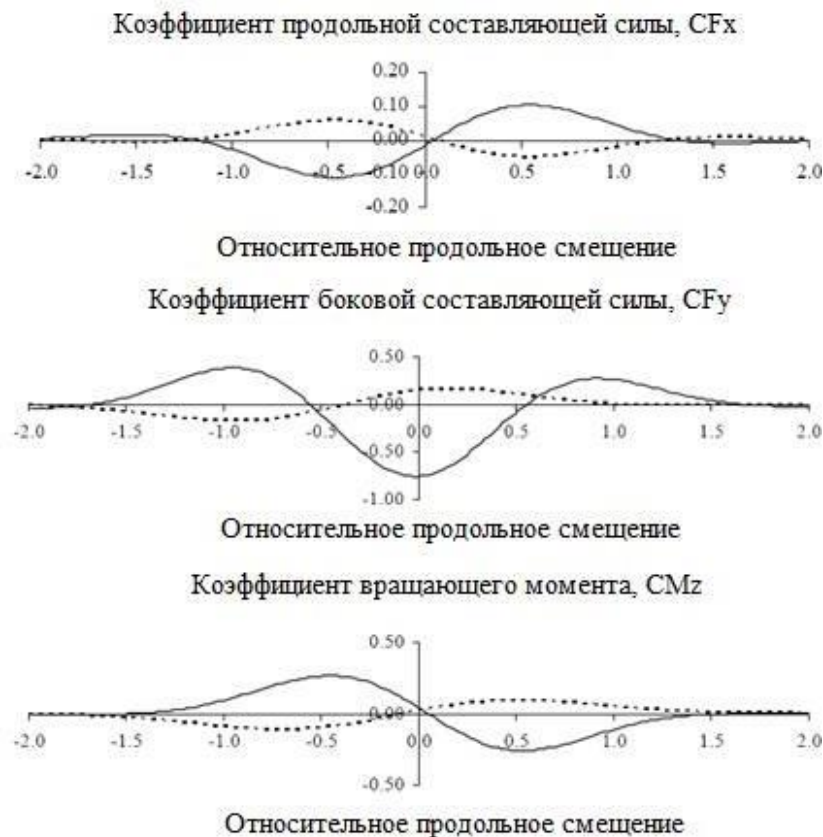


Рис. 1. Обобщенная картина изменения гидродинамических сил и моментов для случая обгона судов близких по значению размеров из работы [38].

В указанной работе, исследовались судна различных, но близких по значениям размеров: $L_1/L_2=1.3$; $B_1/B_2=1.465$; $T_1/T_2=1$; $C_{B1}/C_{B2}=0.86$. Сплошной линией представлены значения для обгоняемого судна-цели, точечной линией - обгоняющего основного судна. Согласно установленной в работе системе знаков, отрицательные значения коэффициента продольной силы означают рост силы сопротивления; отрицательные значения боковой силы – смещение судна в направлении судна-партнера; отрицательные значения момента рыскания – поворот носовой оконечности судна в направлении судна партнера. Согласно приведенным графикам можно сделать следующие основные выводы о характере возникающих сил и моментов:

- продольная сила имеет два основных максимума: обгоняемое судно испытывает снижение скорости в связи с ростом сопротивления на корпусе. Максимальное влияние обгоняемое судно испытывает в момент, когда нос обгоняющего судна достигает его кормовую оконечность. В момент, когда миделевые сечения судов находятся а одном уровне, знак действующих сил меняется: сопротивление на корпусе судна снижается. Обгоняющее судно испытывает аналогичный характер влияния, но с противоположными знаками;
- изменение характера возникающих боковых сил имеет несколько более сложный характер: обгоняемое судно испытывает три пиковых значения, в то время как обгоняющее – два. Возникающие на корпусе обгоняемого судна силы стремятся сместить его первоначально в сторону судна-партнера, далее – от него, и затем снова в сторону судна-партнера. В то же время, обгоняющее судно стремится в сторону обгоняемого и далее от него. Следует отметить, что взаимное влияние суда начинают испытывать приблизительно в одинаковый момент времени, однако для обгоняемого судна-судии этот эффект сохраняется более длительный период времени;
- согласно проведенным исследованиям, характер влияния момента рыскания невозможно обобщить для различных параметров. Количество возникающих максимумов зависит от условий взаимодействия (соотношение размеров, скоростей, расстояние между судами) и их комбинаций. В приведенном случае, обгоняемое судно стремится развернуться в направлении судна-партнера, позднее – от него.

Обобщая результаты проведенного анализа, следует отметить, что обгоняемое судно партнер испытывает более значительное влияние возникающих сил и моментов взаимодействия, нежели обгоняющее судно-партнер.

Обширную серию испытаний моделей судов равных длин при совершении различных маневров впервые описал М. Ванторре (M. Vantorre, 2001) [24]. Производились измерения в ходе экспериментальных исследований двух фиксированных моделей, движущихся с одинаковыми скоростями и самоходных испытаний. Отмечено, что в ходе экспериментальных исследований самоходных моделей, потребовались постоянные действия рулем для удержания модели на заданном курсе. На Рис. 2 приведены стадии обгонного движения с соответствующими направлениями пере- кладки.

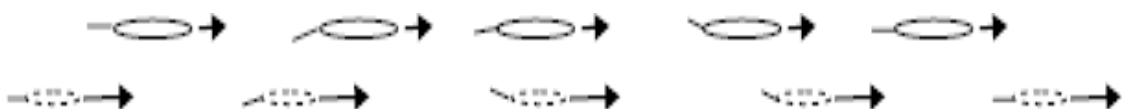


Рис. 2: Характерные углы перекадки руля в процессе обгона, по данным экспериментального исследования М. Ванторре и др. [24].

В случае обгонного движения, при достижении относительного продольного расстояния $d = -0.45 \div 0.47$ – положение корма – нос – угол перекладки рулей начал резко возрастать от значения -10^0 до $+30^0$ при относительном коэффициенте продольного расстояния между миделевыми сечениями судов $\xi = -0.1 \div 0$, что соответствует положению “мидель-мидель”. После прохождения миделевых сечений необходимый угол перекладки снова уменьшался. Измерения производились для модели с большей скоростью движения. На сегодняшний день тестирование большинства численных моделей производится на основе результатов именно этих экспериментов.

Среди последних экспериментальных исследований известна работа Э.Латаира и др. (E. Lataire et al., 2009) [39] в области моделирования случая дозаправки судов на открытой воде, произведенная на модели служебного судна (SS) AFRAMAX и танкера KVLCC2 (STBL). Масштаб 1:75, модели движительно-рулевым комплексом (ДПК). В ходе испытаний тестировались скорости 2, 4 и 6 узлов при учете влияния мелководья. Серия тестов была проведена для фиксированного положения моделей, отдельная серия включала варьирование углов движения только для служебного судна (SS). В ходе динамических испытаний производились измерения боковых сил и момента рыскания с учетом влияния действия гребного винта и руля. Так же были получены данные о влиянии волнообразования.

В последнее время, акцент теоретических и экспериментальных исследований сместился несколько в сторону изучения комплексной задачи движения судов в условиях ограниченной акватории. Это связано в первую очередь с несколькими крупными проектами расширения существующих портов и шлюзов, таких как Антверпенский, и строительства новых. Так же новое развитие получило решения задачи оптимизации движения судов в условиях рек и каналов. Так, в рамках исследований для Панамского канала была создана рабочая группа 155, С. Торенц (C. Thorenz, 2013) [41] с целью проведения экспериментальных исследований поведения судна непосредственно внутри шлюза и при входе в него [42]. Модельные и натурные испытания так же проводились для Западного шлюза Нидерландов и описаны Д. Вервиллингом и др. (J. Verwilligen et al., 2012) [43]. Полученные им позднее с помощью математического моделирования результаты для выхода и входа судна в шлюз позволили провести предварительную оценку навигационного качества проекта. К более частным случаям гидродинамического взаимодействия судов можно отнести дозаправку судов на предельно малых расстояниях. Масштабный эксперимент с последующим моделированием методами ВГД (CFD) для подобной задачи был проведен Т. Арсланом и др. (T. Arslan et al., 2011) [44]. Исследовался характер течения между судами в зоне миделевых сечений с помощью метода меченых частиц (PIV), результаты которого были использованы для последующей валидации численных результатов. Сравнительный анализ показал в целом высокую степень точности решения ВГД (CFD).

М. Сано и др. (M. Sano et al., 2013) [45] провели экспериментальное исследование для определения продольной, боковой сил и момента рыскания на корпусе взаимодействующих тел Вигли с учетом действия руля.

Полученные результаты позволили утверждать, что возникающие в связи с взаимодействием нестационарных сил и моментов оказывают влияние не только на основное судно, но и судно цель. На основе полученных данных так же предложен подход к решению задачи определения влияния взаимодействия в рамках нелинейной теории.

Ко второй группе исследовательских работ ранее были отнесены результаты, полученные с помощью численных методов на основе теоретических подходов. Основная групп теоретических методов определения гидродинамических сил и моментов основывается на предположении, что жидкость невязкая, несжимаемая. Движение жидкости считается безвихревым, значения чисел Фруда малыми, а свободная поверхность условно принимается в виде твердой стенки. Таким образом исключается влияния волнообразования на характер гидродинамического взаимодействия.

Разработка теоретических методов определения гидродинамических сил и моментов началась относительно рано. Одни из первых результатов были получены учеными Е.О. Так и Д.Н. Ньюман (E.O. Tuck & J.N. Newman, 1974) [25], К. Кижима (K. Kijima, 1987) [14], П. Каплан и К. Санкарараянан (P. Kaplan & K. Sankaranarayanan, 1987) [13], исследователи Д.Л. Хесс и А.М.О. Смит (Hess, J.L., Smith, A.M.O., 1964) [66] предложили основные уравнения для трехмерных тел в потенциальном потоке. Однако, с точки зрения создания общей теории, принято считать, что начало работ в области явления гидродинамического взаимодействия судов было положено с помощью потенциальной теории на примере простых тел [21]. Исследователями рассматривалась упрощенная задача, когда явление взаимного притяжения двух тел, при совместном движении с одинаковой скоростью перпендикулярно к линии, соединяющей их центры, описывается уравнениями Бернулли-Эйлера.

Полагалось, что в безграничной идеальной жидкости движутся два круговых цилиндра с некоторой скоростью параллельно, на расстоянии между их поверхностями. В обращенном движении на поверхности каждого цилиндра скорость жидкости определяется известной из гидромеханики формулой:

$$V_s = 2V_0 \sin \theta,$$

где $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ - полярный угол. Соответственно при сближении двух цилиндров ($h_0 \rightarrow 0$) скорости на поверхности тел и в зазоре между ними будут возрастать, т.е. $V_i > V_0$. Записывая уравнение Бернулли для двух точек линии тока, проходящей между цилиндрами без учета массовых сил:

$$p_0 + \frac{\rho V_0^2}{2} = p_i + \frac{\rho V_i^2}{2},$$

где левая часть равенства относится к точке, находящейся на бесконечном удалении перед цилиндром, правая – к расположенной в зазоре между цилиндрами (p_0 , p_i – соответствующие давления, ρ - плотность жидкости).

Поскольку $V_i > V_0$, $p_i < p_0$, т.е. давление в пространстве между цилиндрами меньше, чем в окружающей жидкости, получается что на цилиндры будут действовать притягивающие силы, обусловленные разностью давлений.

Данный подход был сфокусирован на задаче моделирования изменяющейся траектории движения тел и получил развитие в работах многих авторов. Обусловленный подход к изучению феномена гидродинамического взаимодействия тел в жидкости возможен, так как преобладающее влияние оказывают силы обусловленные давлением, однако пренебрежение массовыми силами ведет к потере важной части информации о характере взаимодействия. Таким образом, например, не учитывается влияние свободной поверхности и сил, обусловленных гравитацией.

В 1879 г. Б. М. Хиксом (Hicks V.M., 1879) [46] была решена задача о произвольном движении в идеальной безграничной жидкости двух круглых цилиндров бесконечной длины, оси которых остаются параллельными во время движения. Потенциал скоростей найден им в конечном виде и выражается через эллиптические функции от биполярных координат. В 1880 г. Б. М. Хиксом [47] было получено точное решение задачи о движении двух сфер вдоль линии, соединяющей их центры. Б. М. Хикс решил задачу методом отображений и получил коэффициенты при скоростях в выражении для кинетической энергии в виде бесконечных рядов. В этой же работе Б. М. Хикс приближенно решил задачу о движении двух шаров перпендикулярно к линии, соединяющей их центры.

Вопрос о движении двух сфер в безграничной жидкости в последующие года рассматривался в разной степени многими авторами, такими как: Г. Ламб [48], М.Л. Милн-Томсон [50], А.М. Богословский и А.А. Костюков [51], Ф.Ф. Карал и др. [49].

Следует отметить, что опыт гидромеханики, накопленный при решении задач о гидродинамическом взаимодействии тел простейшей формы (шар, круговой цилиндр), позволил в дальнейшем перейти к рассмотрению взаимодействия тел, обводы которых близки к судовым, в частности трехосных эллипсоидов (в работах В.С. Сабанеева [52-54], рассматривается движение вблизи плоской стенки). Полученное в результате выражение для потенциала скоростей системы тел в конечном итоге позволяет определять распределение давлений по поверхности эллипсоида, а поперечную силу присасывания как функцию расстояния между большей осью эллипсоида и стенкой.

Следует обратить отдельное внимание на результаты, полученные Ю.И.Фаддеевым [55]: задача определения гидродинамических сил и моментов, действующих на шар, плоский овал, пространственный овал Ренкина, пространственный несимметричный овал при движении вдоль плоской стенки с постоянной скоростью, с точки зрения гидромеханики принималась эквивалентной случаю движения двух одинаковых тел в одном направлении с одинаковой скоростью. В процессе решения использовался так же приближенный метод определения потенциала скоростей системы тел с применением пространственных источников и стоков, помещенных в фокусах овала.

Так, для коэффициента боковой силы, действующей на пространственный симметричный овал при движении его вдоль плоской стенки, была получена формула:

$$C_y^* = \frac{6\delta Y}{\pi \gamma V Fr^2},$$

где δ - коэффициент общей полноты тела; Y - поперечная сила, действующая на тело в направлении

стенки (силы присасывания); γ - объемный вес жидкости; V - объем тела; Fr - число Фруда по длине тела.

Ю.И Фаддеев обратил внимание на резкое изменение значений коэффициентов боковой силы момента в зависимости от изменения относительного расстояния до стенки, и отметил нелинейный характер этих изменений. В то же время, полученные значения коэффициентов поперечных сил для плоского случая значительно (в 3-5 раз) превышали значения, полученные для случая пространственного движения тел вращения. Полученные Ю.И Фаддеевым зависимости представляют интерес для исследования гидродинамического взаимодействия в частном случае, когда оба тела одинаковы, движутся в одинаковом направлении и с одинаковыми скоростями, а миделевые сечения находятся на одном уровне. Частный характер результатов не дает возможности судить о реальных ситуациях взаимодействия судов, но является одним из фундаментальных исследований с точки зрения гидродинамики.

К одной из попыток разработки подхода к определению гидродинамических сил взаимодействия можно отнести исследование, проведенное А.М. Богословским и А.А. Костюковым, использовавших дублированные корпуса надводных судов для случая безграничной жидкости [51]. Авторами рассматривалась задача о возникающих гидродинамических силах при движении двух источников разной мощности с одинаковой скоростью в одном и том же направлении, что по мнению авторов сходно ситуации обгона одного тела другим на равных скоростях. Возникающая поперечная сила присасывания, действующая на источник, имеет следующее выражение:

$$Y = \frac{\rho Q^2}{16\pi h^2},$$

где ρ - плотность жидкости; Q - мощность источника; h - расстояние между источниками.

Численные результаты, полученные в приведенных выше работах, дают возможность сделать ряд интересных качественных выводов. Однако эти результаты не применимы для практических целей в основном из-за малого числа произведенных расчетов, а так же в связи с некоторой неоднозначностью исследованных методов для плоской и объемной постановки задачи: гидродинамические силы оказываются всегда во много раз больше, чем при пространственном движении тел. Вызывает так же сомнение то, что поперечные силы и моменты при обгоне и встречном расхождении при прочих равных условиях имеют одинаковый порядок, так как обгонное движение всегда является более опасным из-за больших поперечной силы и момента рысканья.

-

Из опыта морской практики следует, что наиболее важными гидродинамическими характеристиками, определяющими влияние корпуса одного судна на другое, являются поперечные силы и моменты, воздействующие на судно в горизонтальной плоскости по аналогии с рулевыми силами и моментами. Это вызвано тем, что поперечные силы и моменты, воздействующие в плоскости ватерлинии на судно, определяют степень его поворотливости и устойчивости на курсе, а управле-

мость, как известно, определяет безопасность движения в произвольных путевых условиях.

Среди наиболее обширных исследований, включающих экспериментальное исследование и теоретические изыскания, следует отметить труд Ю.М. Мاستушкина [21]. Полагая жидкость идеальной, несжимаемой, безграничной, он выразил потенциал скоростей при движении системы двух тел, пользуясь методом последовательных приближений и применил данный подход для численно-го моделирования с помощью следующих формул и их преобразований:

$$Y = -\rho \iint_{S_1} \left[V_1 \cos \beta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + V_1 \sin \beta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \text{grad}^2 \Phi \right] \cos(n_1 y_1) dS \quad (1.8)$$

$$M = -\rho \iint_{S_1} \left[V_1 \cos \beta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + V_1 \sin \beta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \text{grad}^2 \Phi \right] \times [x_1 \cos(n_1 y_1) - y_1 \cos(n_1 x_1)] dS$$

Соответствующее дифференцирование потенциала по пространственным координатам и времени позволило получить выражение для боковой силы (Y) и момента рыскания (M). Для частного случая рассматриваемого движения, например в случае обгона, при равных скоростях и отсутствии угла дрейфа согласно автору движение является стационарным, поэтому приведенные выражения (1.8) будут иметь следующий вид:

$$Y = -\rho V_1 \iint_{S_1} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1} \cos(n_1 y_1) dS + \frac{\rho}{2} \iint_{S_1} \text{grad}^2 \Phi_0 \cos(n_1 y_1) dS$$

$$M = -\rho V_1 \iint_{S_1} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1} [x_1 \cos(n_1 y_1) - y_1 \cos(n_1 x_1)] dS \quad (1.9)$$

$$+ \frac{\rho}{2} \iint_{S_1} \text{grad}^2 \Phi_0 [x_1 \cos(n_1 y_1) - y_1 \cos(n_1 x_1)] dS$$

Таким образом производится моделирование значений сил и момента для конкретного положения судов относительно друг друга, без учета относительного смещения в течение времени.

Тогда с учетом преобразований Н.Е. Жуковского [57] выражения (1.9) приобретают следующий вид:

$$Y = -\rho V_1 \iint_{S_1} \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} \cos(n_1 x_1) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1} \cos(n_1 y_1) \right] dS$$

$$M = -\rho V_1 \iint_{S_1} x_1 \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} \cos(n_1 x_1) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1} \cos(n_1 y_1) \right] dS$$

Основываясь на предположении о том, что при совместном движении двух судов можно получить линеаризованные выражения для поперечной силы и момента, на основе закона количества движения, по аналогии с теоретической гидромеханикой для случая движения одного тела в безграничной идеальной жидкости, а так же с учетом симметричности потока получил следующие выражения:

$$Y = \rho \frac{d}{dt} \Phi \cos(n_1 y_1) dS \quad (1.10)$$

$$M = \rho \frac{d}{dt} \iint_{S_1} \Phi [x_1 \cos(n_1 y_1) - y_1 \cos(n_1 x_1)] dS + \rho V_1 \iint_{S_1} \Phi \cos(n_1 y_1) dS$$

Далее учитывается изменение продольного расстояния между миделевыми сечениями судов (м) следующим образом:

$$\text{при } t = t_0, |V_1| \neq |V_2|$$

$$m_1 = m_0 - V_1 t - \frac{1}{2}$$

$$\text{при } t = t_0, V_1 > V_2$$

$$m_2 = m_0 - (V_1 - V_2)t$$

Применение данных менее громоздких формул для численных расчетов становится более целесообразным, однако сопоставительное разделение членов в выражениях (1.10) является недостаточно корректным. По результатам численного моделирования задачи, можно сделать вывод об ограниченности использования данных формул для расчета гидродинамических сил и моментов. Следует отметить, что с помощью данного подхода моделируется задача обгонного движения для двух эллипсоидов в безграничной жидкости. Автор проводит численные расчеты поперечных сил и моментов, полагая возможным применять полученные данные для вариации основных геометрических характеристик корпуса и кинематических параметров совместного движения судов. Таким образом автор исключает возможность учета влияния формы корпуса натурального судна, и как было отмечено ранее, влияние волнообразования на свободной поверхности при движении судна в связи с ограничениями потенциальной теории.

Пример полученных безразмерных коэффициентов поперечной силы и момента рыскания, приводятся в табличной форме далее (Табл2, 3), и позволяют судить о размере и характере сил, учитывая знаки:

Таблица 2. Изменение коэффициентов боковой силы при встречном расхождении двух одинаковых судов на различных относительных скоростях (численный эксперимент [21]).

\bar{m}	\bar{V}_2	$C_y \cdot 10^3$	\bar{V}_2	$C_y \cdot 10^3$	\bar{V}_2	$C_y \cdot 10^3$
-2.0	-0.5	-	-1.0	-0.1	-1.5	-0.09
		0.015				
-1.6		-0.09		-0.25		-0.101
-1.2		-0.06		-0.21		-0.06
-0.8		0.01		0.24		0.16
-0.4		0.14		0.401		0.25
0		0.19		0.49		0.38
-0.4		0.14		0.401		0.25
0.8		0.01		0.24		0.16
1.2		-0.06		-0.21		-0.06
1.6		-0.09		-0.25		-0.101
2.0		-		-0.1		-0.09
		0.015				

Таблица 3. Изменение коэффициентов момента при встречном расхождении двух одинаковых судов на различных относительных скоростях (численный эксперимент [21]).

\bar{m}	\bar{V}_2	$C_m \cdot 10^3$	\bar{V}_2	$C_m \cdot 10^3$	\bar{V}_2	$C_m \cdot 10^3$
-1.6	-0.5	0.01	-1.0	0.02	-1.5	0.015
-1.2		0.025		0.049		0.018
-0.8		0.029		0		-0.04
-0.4		0.025		-		-0.09
				0.098		
0		0		0		0
-0.4		-		0-		0.09
		0.025		0.098		
0.8		-		0		0.04
		0.029				
1.2		-		0.049		-0.018
		0.025				
1.6		-0.01		0.02		-0.015

Здесь, исходя из замены подводной части судна поверхностью трехосного эллипсоида с полуосями $a > b > c$ (длина, ширина, осадка соответственно), обезразмеривание производится с помощью длины эллипсоида, квадрата и куба величины для боковой силы и отворачивающего момента соответственно.

Следует отметить, что данный подход к определению безразмерных коэффициентов силы и момента используется достаточно часто в подобных работах других авторов, однако выбор параметров обезразмеривания не является однозначным в задаче взаимодействующих объектов, в особенности судов. Подробно данный вопрос освещен в Главе 4.

На сегодняшний день, как правило, математическая модель движения судна состоит из уравнений движения судна, а информация о гидродинамических силах и моментах представляется в

виде данных, собранных на основе экспериментальных исследований. Благодаря значительному и непрерывному росту вычислительных мощностей, идея о моделировании сложных физических явлений гидродинамики судна в рамках ВГД (CFD) методами прямого численного моделирования становится в определенной степени доступной, но на сегодняшний день по-прежнему не осуществленной. В то же время, широкий спектр исследований по-прежнему основывается на допущении о потенциальности течения. Так, Д. А. Пинкстер и К. Бхавсинка (J.A. Pinkster and K. Bhawsinka, 2013) [26] начали разработки в области внедрения указанных методов, в процесс имитационного моделирования маневрирования судна. Основной идеей подхода авторов является получение информации о гидродинамических характеристиках судна в режиме реального времени, и применение численных данных для получения траекторий движения судна в условиях гидродинамического взаимодействия судов и судна с портовыми сооружениями. В указанной работе, моделирование потенциального течения и реакций исследуемого судна производится при временном шаге от 0.6 до 1.3 секунды, в то время как моделирование непосредственно движения судна, с учетом взаимодействия, производится при шаге 0.2 секунды. К основным заключениям авторов относится идея о том, что моделирование в режиме реального времени методами ВГД (CFD) на сегодняшний день остается невозможным по причине очень высоких требований к вычислительным мощностям, в то время как модель потенциального течения позволяет получать результаты в режиме реального времени при низких вычислительных требованиях. Однако, основываясь на результатах, представленных в указанной работе и анализе работ других авторов [60-64, 97-101] следует указать следующие особенности приведенной группы численных методов:

1. Результаты моделирования в значительной степени зависят от дискретизации геометрической поверхности корпуса моделируемых судов:
 - количество панелей корпуса судна оказывает значительное влияние на длительность расчетов;
 - изменение параметров модели в малой степени (число панелей, шаг по времени и т.д.) может значительно увеличить время моделирования;
 - отсутствие стабильного поведения математической модели;
2. К основным достоинствам модели следует отнести возможность моделирования в режиме реального времени: здесь шаг по времени может быть равен 1 секунде физического времени.

Сравнительный анализ полученных в рамках потенциальных методов значений для сил и моментов с учетом гидродинамического взаимодействия судов и экспериментальных данных приводится в Табл. 4. Здесь моделирование производилось для корпуса основного судна; ϵ - относительное продольное смещение судов.

Таблица 4. Анализ полученных результатов: основное судно обгоняет судно –цель.

	Согласование результатов	X' : безразмерная продольная сила	Y' : безразмерная поперечная сила	N' : безразмерный момент рыскания
$\varepsilon \cong -1 \div +1$ Основные этапы маневрирования: 1). положение корма - нос в положении цель-основное судно соответственно 2). положение нос-корма в положении цель-основное судно соответственно	X' : Приемлемая точность, характер изменения сил моделируется согласно эксперименту; Y' : отсутствие согласования; N' : 1) согласование 2) математическая модель завышает значения. Причина – наиболее вероятно наличие масштабного эффекта оказывается существенное влияние.	Судно преодолевает небольшую силу сопротивления, далее возникает дополнительная пропульсивная сила: максимальное значение определяется в диапазоне $-0.5 < \varepsilon > -0.3$. Максимум сменяется быстрым падением пропульсивной силы, иногда с небольшим колебанием значений в районе 0. Т.о. судно преодолевает возникающую дополнительную силу сопротивления.	Результаты математического моделирования указывают на значительную отрицательную силу (судно смещается в сторону обгоняемого). Так же наблюдается симметричность результатов относительно вертикальной оси Y . Результаты эксперимента неоднородны, пик присасывающей силы наблюдается в диапазоне $-0.5 < \varepsilon > -0.3$, рост расталкивающей силы наблюдается в диапазоне $0.5 < \varepsilon > 0.8$. Максимальные значения по абсолютной величине практически равны.	Характеризуется возникновением момента стремящегося развернуть нос судна в сторону обгоняемого и двумя пиками значений, приблизительно равными по величине.

В работе [29] приведены результаты сравнения существующих рекомендаций и значений полученных с помощью различных численных подходов, основанных на потенциальной теории. Следует отметить, что наблюдается зависимость результатов от выбранной скорости движения и временного шага. Так, для случая движения со скоростью в пределах 5-8 узлов, при временном шаге 0.2 сек полученное значение безопасного расстояния между судами составляет $0.65B$; для 0.5 сек – расстояние $0.8B$; для 1 сек – $1.25B$. Можно предположить, что при увеличении временного шага точность возрастает, так как согласно существующим рекомендациям безопасное расстояние в указанном случае составляет $1.6B$, однако можно так же сказать, что стабильности математической модели в данном случае отсутствует.

В общем числе работ так же следует отметить группу полуэмпирических формул [59], с помощью которых проводится анализ и оценка изменения сил и моментов в течение времени, как правило в виде зависимости от скорости, геометрии и внешних параметров. К классическим, часто используемым для оценочных расчетов, можно отнести формулы, разработанные Д. Бриксом (J. Brix, 1993) [11] для случая обгонного движения. Максимальные значения продольной, боковой силы момента рыскания определяются с помощью следующих зависимостей:

$$\begin{aligned} X_{max} &= (0.014 \div 0.017) \frac{1}{2} \rho V_m^2 L_m T_m \\ Y_{max} &= (0.025 \div 0.030) \frac{1}{2} \rho V_m^2 L_m T_m \\ N_{max} &= (0.004 \div 0.007) \frac{1}{2} \rho V_m^2 L_m^2 T_m, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $L_m = \frac{1}{2}(L_o + L_T)$; $T_m = \frac{1}{2}(T_o + T_T)$; $V_m = \frac{1}{2}(V_o + V_T)$

- осредненные значения длины, осадки и

скорости, вовлеченных во взаимодействие судов; индексы “о” и “т” обозначают “основное” и “целевое” судно. В данном случае, наименьшие значения из диапазона эмпирических коэффициентов применяются при следующем соотношении длин судов: $\frac{L_T}{L_o} > 1.5$.

Приведённые зависимости (1.11), применимы в случаях, когда расстояния между диаметральной плоскостями движущихся судов соответствует значениям $y_{cc0} = 0.35L_m$. Влияние глубины акватории в данном подходе не учитывается, а соотношение длин корпусов ограничено.

Влияние расстояния в общем случае может учитываться следующим образом:

$$\begin{aligned} y_{cc} &< 0.6L_m: a \ y_{cc}^{-1} \\ 0.6L_m &< y_{cc} < 1.6L_m: a \ y_{cc}^{-2} \\ y_{cc} &> 1.0L_m: a \ y_{cc}^{-3} \div y_{cc}^{-4} \end{aligned}$$

К. Вараяни и др. (K. Varyani et.al, 1999) [59] в своей работе предложил следующие зависимости для определения только максимальных значений продольных сил (Y_i) и моментов (N_i), возникающих при встречном расхождении, для следующих типов судов: острые обводы и полные обводы корпуса. С точки зрения постановки задачи, были исследованы случай когда длины корпусов расходящихся судов сравнимы, и когда длина одного из них значительно меньше.

$$Y_i = \frac{1}{2} \rho V_o V_T B_o T_o Y_i^{ms} \left(1 + \frac{y_{cc}}{L_o}\right)^{\alpha_i} \left[\left(\frac{h}{T_o}\right) + Y_i^{md}\right]^{\beta_i} \left(\frac{L_o}{L_T}\right)^{\delta} \left[1 + Y_i^{mu} \left(\frac{V_T - V_o}{V_o}\right)\right],$$

где индекс i означает относительное положение судов: $i = 1$: нос-нос; $i = 2$: мидель-мидель; $i = 3$: корма-корма.

$$N_i = \frac{1}{2} \rho V_o V_T B_o T_o N_i^{ms} \left(1 + \frac{y_{cc}}{L_o}\right)^{\varepsilon_i} \left[\left(\frac{h}{T_o}\right) + N_i^{md}\right]^{\varphi_i} \left(\frac{L_o}{L_T}\right)^{\delta} \left[1 + N_i^{mu} \left(\frac{V_T - V_o}{V_o}\right)\right].$$

Для определения основных этапов встречного расхождения относительно момента рыскания, автор предлагает четыре основных этапа, в отличие от трех для сил: $i = 1$: нос-нос; $i = 2$: момент непосредственно перед достижением положения мидель-мидель; $i = 3$: момент непосредственно после прохождения положения мидель-мидель; $i = 4$: корма-корма.

Анализ полученных результатов в сравнении с экспериментальными данными М. Ванторре и др., 2001 (M. Vantorre et.al., 2001) [40] показал, что метод, предложенный К. Вараяни и др. (K. Varyani et.al, 1999) [59] для определения продольной составляющей силы и момента рыскания позволяет получить результаты того же порядка, что и экспериментальные исследования для судов полных обводов. Однако, наблюдается недостаточное предсказание изменения осадки основного судна, в то время как завышаются значения для изменения осадки целевого судна. В то же время, продольные силы, возникающие на корпусе судна с более острыми обводами в процессе расхождения с судном более полных обводов при относительно равных длинах корпусов однозначно недостаточно предсказываются по формуле: первый максимум момента рыскания значительно недооценен, следовательно следующие максимальные значения могут быть так же предсказаны неточно. Сравнение результатов полученных по методу, предложенному Д. Бриксом (J. Brix) [11], с экспериментальными данными, полученными М. Ванторре и др., 2001 (M. Vantorre et.al., 2001) [24], так же выявляет некоторое завышение значений сил, возникающих на корпусе обгоняемого судна. Необходимо так же отметить, что данный метод может использоваться только для случая глубокой воды.

В процессе маневрирования, особенно в сложных условиях, судно испытывает динамическое изменение положения в связи с меняющимися окружающими условиями. В случае обгонного движения, динамическое изменение положения судна может определяться как совместное изменение осадки и дифферента при движении, связанных в основном со скоростью самого судна. Исследователь Е.О. Так определил это явление следующим образом: "Это не только изменение осадки (...). Это общее погружение судна и изменение уровня окружающей его жидкости. Поэтому этот эффект практически незаметен на открытой воде, где все же такой эффект возникает. Однако, в большей степени возникновение данного эффекта следует отнести к случаю ограниченного фарватера (...)." Описанный эффект может иметь решающее значение при посадке судна на мель на мелководье.

Е.О. Так, 1966-67 (E.O. Tuck, 1966) [60], и Е.О. Так и П.Д. Тейлор, 1970 (E.O. Tuck & P. J. Taylor, 1970) [62], получили выражение для определения изменения осадки (C_s) и дифферента (C_c) в рамках применения теории для тонких тел. Рассматривались одномерная, двухмерная и трехмерная задачи:

$$C_S = 100 \frac{S_m}{L_{PP}} = 100 C_{SS} \frac{Fr_h^2}{\sqrt{1 - Fr_h^2}},$$

$$C_T = 100 \frac{t}{L_{PP}} = 100 C_T \frac{Fr_h^2}{\sqrt{1 - Fr_h^2}},$$

где S_m и t определяют степень погружения и дифферент на миделе соответственно; Fr_h - число Фруда по глубине; C_{SS} и C_T - эмпирические коэффициенты сил и моментов, зависящие так же площади смоченной поверхности корпуса судна. Альтернативное представление параметров S_m и t учитывает объемное водоизмещение судна.

С помощью допущений одномерной постановки задачи была решена плоская задача, и разработан упрощенный подход к частичному определению параметров движения судна. Полуэмпирическая теория для определения степени погружения и дифферента корпуса судна с достаточной точностью впервые была представлена И.В. Дандом и А.М. Фергюсоном, 1973 (I.W. Dand & A.M. Ferguson, 1973) [10]. Для судна шириной $B(x)$, площадью поперечного сечения $A(x)$, движущегося со скоростью V в канале с вертикальными стенками, площадь поперечного сечения которого определяется как $A_{ch} = W \cdot h$, совместное решение уравнения Бернулли и уравнения неразрывности в случае относительной скорости движения воды в канале сечения $U'1(x)$, приводит к следующему выражению:

$$\frac{1}{2} Fr_h^2 \left(\frac{U_1(x)}{U} \right)^3 - \left(1 - m(x) + \frac{1}{2} Fr_h^2 \right) \frac{U_1(x)}{U} + 1 = 0,$$

где $m(x) = \frac{A(x)}{A_{ch}}$ - местный поправочный коэффициент.

Изменение уровня жидкости ($\zeta(x)$) непосредственно вблизи корпуса:

$$\frac{\zeta(x)}{h} = -\frac{1}{2} Fr_h^2 \left(\left(\frac{U_1(x)}{U} \right)^2 - 1 \right)$$

Интегрирование переменных значений уровня воды вокруг судна по длине судна приводит к получению коэффициентов для изменяющихся осадки и дифферента:

$$C_{S1} = 100 \frac{S_m}{L_{PP}} = \frac{100 \int \zeta(x) B(x) dx}{L_{PP} \int B(x) dx}$$

$$C_{T1} = 100 \tau = 100 \frac{t}{L_{PP}} = \frac{100 \int \zeta(x) B(x) x dx}{L_{PP} \int B(x) x^2 dx}$$

Приведенный подход может быть применен в задачах движения на мелководье с безграничной шириной канала в случае, когда эффективная ширина канала определена. И.В. Данд и А.М. Фергюсон [10] предложили считать значением эффективной ширины канала $W = 0.975 L_{pp}$ и использовать поправочные коэффициенты.

Среди последних теоретических исследований, посвященных вопросу определения сил гидродинамического взаимодействия, следует отметить подход, разработанный А. Гронарцем (А. Gronarz, 2009) [65], основанный на заключениях Д. Брикса (J. Brix, 1993) [11] и частично экспериментальных данных М. Ванторре (M. Vantorre, 2001) [24].

Численная модель создавалась с целью разработки эмпирического подхода, включая расчеты методами ВГД, для моделирования движения с заданным курсовым углом, обгона и обгонного движения при наличии углов дрейфа. Результаты включали в себя базовую кривую, характеризующую изменение гидродинамических сил и моментов в течение времени, а так же определение основных управляющих параметров обгонного движения как: глубина фарватера, продольное расстояние между корпусами и основные размерения судна.

Моделирование гидродинамических сил взаимодействия, как функций затухающих колебаний, с использованием коэффициентов, учитывающих зависимость условий и параметров процесса, считается наиболее адекватным в случае сравнимых по размерам и скоростей судов. Но во многих случаях такой подход неприменим, так как, например, в случае значительной разницы длин корпусов, возникающие силы невозможно описать в виде гармонических колебаний. Варьированием же скорости от максимального значения $+V_{\max}$ до минимального $-V_{\max}$, включая нулевое значение, охватывается весь спектр задач от случая обгона до расхождения судов, впрочем здесь также некорректно моделировать возникающие эффекты с помощью тригонометрических функций.

Таким образом в своей работе А. Гронарц (А. Gronarz, 2011) [64] представил более качественный подход, так же основанный на использовании характеристических кривых для сил и моментов, но уже дополненный функциями параметров воздействий с переменными показателями степени - экспонентами, основанных на нелинейном регрессионном анализе по результатам модельных испытаний. Таким образом, подход имеет основу комплексного регрессионного анализа и представляет собой уже не одну формулу, а алгоритм, сформулированный в виде программы. Для более качественного применения метода, есть возможность создания структуры с программой поиска данных и специально организованных входных данных, с целью определения сил взаимодействия с высокой степенью адаптивности в зависимости от источника исходных данных.

Однако, при ограниченности информации о силовых характеристиках судна создать математическую модель, адекватно отражающую физическую картину, довольно проблематично. Так же следует отметить, что характер изменения ГДХ судна при взаимодействии может в значительной степени отличаться в зависимости от условий как качественно - по количеству возникающих пиковых значений, так и количественно - из размером. Следовательно создание универсальной аппроксимирующей функции или же набора коэффициентов представляется крайне затруднительным.

Одним из путей решения проблемы недостатка данных может стать прогнозирование значений силовых характеристик, основанное на качественных результатах численного моделирования методами ВГД. Далее в процессе настройки модели может производиться корректировка на основе исходных данных о маневренных характеристиках моделируемого судна. Точность настройки модели будет напрямую зависеть от объема и качества исходной информации. Таким образом открывается возможность проведения серийных испытаний в рамках численного моделирования, что позволит существенно сократить время и финансовые затраты для получения результатов. Оценка точности и применимости существующих программных комплексов, основанных на методах и моделях ВГД, в области корабельной гидродинамики достаточно обширно произведена в рамках технической сессии Гетеборгской конференции [65] для серии судовых корпусов в натурном и модельном масштабах, и активно продолжается по сегодняшний день. Критический анализ адекватности приведенных результатов в сравнение с данными модельных испытаний позволяет судить о возможности дальнейшего применения некоторых программных комплексов в задачах моделирования поведения судна.

Обобщая изученные результаты экспериментальных и численных исследований, а так же учитывая опыт морской практики известный из литературы, характер сил и моментов, возникающих при взаимодействии судов, имеет следующие ключевые особенности:

Расхождение судов:

- в продольном направлении, в начале взаимодействия сопротивление на корпусе уменьшается, потом – возрастает;
- боковая сила имеет переменный характер: в начале маневра происходит увеличение возникающей силы – отворачивание (в момент когда носы судов находятся примерно на одном уровне), затем происходит сближение, после чего снова отворачивание (корма основного и целевого судов находятся примерно на одном уровне);
- для момента рыскания можно выделить четыре основных периода: отворачивание носа судна, обратный поворот, снова отворачивание носа судна и вновь обратный поворот.

Таким образом действие сил и моментов, возникающих на корпусе, характеризуется несколькими пиковыми значениями. Силы действующие в продольном направлении - двумя пиками; поперечном - тремя; для моментов характерны четыре пиковых значения.

Расхождение судов при одинаковых значениях скоростей: физическая картина является в общем случае однообразной для разных значений скоростей, исключая ситуацию, когда скорость одного из судов равна 0 (например, обход основным судном заякоренного целевого судна).

Общая картина взаимодействия характеризуется следующими особенностями:

- наблюдается более значительный рост общего сопротивления за счет роста сил в продольном направлении;
- в поперечном направлении отсутствует начальный период смещения в противоположные стороны;
- для момента рыскания невозможно выявить однозначную картину изменения характера.

Обгон, целевое судно обходит основное судно:

- в продольном направлении, в отличие от случая расхождения судов, первоначально возникает рост сопротивления, а во втором периоде – снижение сопротивления;
- боковая сила имеет, как и в случае расхождения судов, сходный переменный характер;
- момент рыскания характеризуется лишь двумя пиковыми значениями: отворачивание (нос целевого судна)- притягивание (корма целевого судна).

Обгон, влияние скорости целевого судна:

- первоначальное снижение сопротивления на корпусе основного судна не возникает при снижении скорости целевого судна (V_T), значение критической скорости зависит от соотношения скоростей;
- характер воздействия боковой силы не меняется с изменением скорости;
- первоначальное отклонение носа целевого судна в сторону основного судна исчезает при снижении скорости целевого судна, таким образом при $V_T=0$ наблюдается только отворачивание в противоположную сторону.

-

2. Методы вычислительной гидродинамики в решении задач обтекания трехмерных объектов потоком вязкой несжимаемой жидкости

Одним из путей совершенствования математической модели движения объекта является использование моделей вычислительной гидромеханики для определения составляющих правых частей уравнений движения [67]. До настоящего времени основным способом их определения является экспериментальный. Широкое внедрение вычислительных методов для определения гидродинамических характеристик движущихся объектов позволит увеличить скорость получения результатов, полноту получаемой информации и разнообразие исследуемых конфигураций. В настоящей главе рассматриваются методы вычислительной гидромеханики применительно к задаче прогнозирования гидродинамических сил и моментов, действующих на трехмерные объекты при их движении по криволинейной траектории.

2.1. Постановка задачи обтекания системы тел потоком невязкой жидкости

В настоящее время при расчетах обтекания тел потоком жидкости для определения нормальной составляющей силы, действующей на тело со стороны жидкости, и продольного момента часто используются методы на основе гидродинамических особенностей. Указанные методы позволяют находить интегральные характеристики объектов при их обтекании тела под углами атаки с достаточной хорошей точностью, однако при этом не дают возможности производить корректное определение распределенных характеристик. Это подтверждается, например, в работе Ю.В. Гурьева и И.В. Ткаченко [68], в которой произведен расчет дирижабля «Акрон» на основе метода гидродинамических особенностей с одной стороны, и решения уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости методом конечных элементов с другой. Авторами этой работы было показано, что оба подхода корректно определяют нормальную силу и продольный гидродинамический момент с практически приемлемой погрешностью, причем метод гидродинамических особенностей имеет большое преимущество перед вторым в скорости расчетов и меньшей трудоемкости подготовки исходных данных.

Расчет системы тел на основе численного интегрирования уравнений Навье-Стокса (Рейнольдса) наталкивается на ряд практических и теоретических проблем [69], одной из которых является трудность задания граничных условий для поверхностей сложной геометрии, причем для построения сетки с потребным количеством элементов часто необходимы значительные вычислительные мощности. Кроме того, течения жидкости при обтекании реальных тел являются турбулентными,

однако до сегодняшнего дня пока не создано универсальной модели турбулентности, применимой для всех видов течений [70]. Еще одной проблемой является то, что не всегда можно гарантировать устойчивость применяемых алгоритмов, а значит и доверие к получаемым результатам [71, 72]. Поэтому логичной представляется создание системы моделирования для инженерных приложений на основе методов гидродинамических особенностей (например, метода дискретных вихревых особенностей), т.е. использовании приближения идеальной жидкости.

Известно, что движение невязкой несжимаемой жидкости вблизи некоторой системы тел может быть описано на основе уравнений Эйлера с учетом уравнения неразрывности:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

где \vec{v} - скорость течения; \vec{F} - интенсивность массовых сил; ρ - плотность жидкости, p - гидродинамическое давление, ∇ - оператор Гамильтона (набла).

Граничными условиями для системы (2.1) являются:

- условие непротекания на поверхностях S_i тел системы:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{S_i} = 0, \quad (2.2)$$

- условие затухания возмущений на большом удалении от тел:

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty \text{ и } p = p_\infty, \quad (2.3)$$

где \vec{v}_∞ и p_∞ – скорость и давление на большом удалении от тел.

Для нестационарных задач необходимо также задавать начальные условия.

Непосредственное использование данной системы уравнений для решения задачи об обтекании тел дирижабельной формы предпринималось рядом авторов (например [73, 74]), но, судя по всему, такой подход, не приносит большого упрощения задачи по сравнению с непосредственным решением уравнений динамики вязкой жидкости в связи со значительными вычислительными трудностями [71]. Кроме того следует отметить, что попытки установления глобальной корректности задачи Коши для уравнения Эйлера в пространственном случае на сегодняшний день не увенчались успехом [75, 76]. На взгляд автора [67] в настоящее время в связи с развитием вычислительных методов динамики вязкой жидкости с одной стороны, и существованием надежных методов расчета гидродинамических характеристик на основе методов гидродинамических особенностей с другой, решение уравнений Эйлера для моделирования обтекания корабельных объектов становится все менее целесообразным.

На сегодняшний день основным подходом к расчету гидродинамических характеристик тел в рамках указанного приближения является метод гидродинамических особенностей [69, 77, 78-83]. Данный подход имеет огромное количество реализаций, отличающихся как собственно выбором системы особенностей, так и точностью представления и схемами дискретизации [84-86].

Идея о замене воздействия поверхности тела на обтекающий его поток жидкости вихревыми особенностями возникла в конце XIX – начале XX века в трудах английского исследователя Ф. У. Ланчестера [87], который ввел понятие присоединенного вихря, и дал качественное объяснение причины возникновения подъемной силы крыла. Независимо от Ф. Ланчестера данная идея была математически обоснована Н. Е. Жуковским [58] для крыльев бесконечного размаха и постоянного профиля, в результате им позднее была создана вихревая теория гребного винта. Впоследствии, на основе представлений Ф. Ланчестера и Н.Е. Жуковского, Л. Прандтль разработал теорию крыла конечного размаха [88].

Помимо вихревых особенностей для моделирования обтекания тел используется также метод источников и стоков, впервые предложенный У.Дж.М. Ранкиным, и применительно к расчету дирижаблей развитый Т. фон Карманом [89]. Метод вполне успешно применяется и поныне (например, [69,90]).

Применение метода особенностей к решению задачи обтекания тел вращения развивалось, в частности, Л.Д. Волковым, О.П. Сидоровым [91], С.М. Белоцерковским [84, 97], И.К. Лифановым [94-95], J.E. Kerwin [77, 96] и др. на основе замены поверхности тела простым или двойным слоем.

2.2. Метод дискретных вихревых особенностей

Современные методы дискретных вихревых особенностей (ДВО) зародились в 50-е годы трудами С.М. Белоцерковского, а также В.А. Апарина, А.А. Зайцева, А.В. Дворака, И.К. Лифанова, М.И. Ништа, Н.Н. Поляхова, В.К. Трешкова, [109, 110, 96, 111-117] в СССР, а также F.S. Archibald, H. Ashley, P.T. Fink, W. Kraus, A. Leonard, R.I. Lewis, P. Koumoutsakos, P.G. Saffman, T. Sarpkaya и др. за рубежом [77, 118, 86, 119-130]. При этом методы вихрей прошли путь от замены тела одним П-образным вихрем [131, 132], несущей линии и поверхности [113-115, 133] до современных универсальных методов, пригодных для расчета любых объектов с заранее известными линиями отрыва [84, 85, 94].

Среди методов ДВО уместно выделить методы, основанные на замене поверхности набором П-образных вихрей [131] и методы замкнутых вихревых рамок [135]. Применительно к расчету замкнутых тел первый метод разрабатывался, в частности, В.К. Трешковым [134]. При всех своих достоинствах он имеет ряд недостатков, одним из которых являются ограничения, накладываемые на форму панелей.

Метод замкнутых вихревых рамок зародился в трудах С.М. Белоцерковского и его учеников [84, 85] применительно к задачам аэродинамики, пройдя при этом большой путь от линейных стационарных [113] и нестационарных [114] задач до задач расчета плоских, осесимметричных и пространственных отрывных нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости [115, 135-137]. Область его применения оказалась очень велика. В частности, он может использоваться в задачах электродинамики (где дискретные вихри можно интерпретировать как дискретные токи) и теории упругости (считая их моделью сосредоточенных сил). Для крыльев и крыльевых систем такой подход дает хорошее сочетание скорости и точности расчета, в чем можно вполне убедиться, используя опыт расчетов авиационных компоновок (например, [138, 133, 139] и др.).

Более того, предпринимались безуспешные попытки использовать данный метод для расчета турбулентных течений, прежде всего – струй и следов [140, 141-143]. В основе такого использования лежит то соображение, что с точки зрения уравнений Навье-Стокса турбулентность является результатом потери устойчивости ламинарного движения, т.е. в потоке изначально вихрей нет. А это должно накладывать ограничения на качество прогнозирования потери устойчивости течения. В то же время метод дискретных вихрей обеспечивает переход от изначально вихревого движения к мелкомасштабным вихревым структурам, что, по мнению С. М. Белоцерковского и его последователей, является более естественным [141]. Применимость такого подхода еще нуждается в дальнейших исследованиях, но работы в этом направлении ведутся (например, [144-146]).

2.3. Основные уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости

Группа подходов, объединенных допущением об отсутствии вязкости жидкости, обладает рядом ценных достоинств, основными среди которых являются высокая скорость счета, простота подготовки исходных данных и анализа полученных результатов. Вместе с тем, такие подходы позволяют получать лишь ограниченный объем информации о течении. Когда же целью моделирования является получение максимально возможного объема информации об объекте (т.е. как интегральных, так и распределенных величин), то следует использовать подходы, основанные на аппарате механики вязкой жидкости.

В большинстве случаев, при решении задач корабельной гидродинамики принято рассматривать обращенное движение объекта, т.е. полагать, что неподвижный объект обтекается потоком жидкости. Такой подход принят в основном и в данной работе.

Известно, что движение вязкой несжимаемой жидкости в поле массовых сил описывается системой уравнений Навье-Стокса, основанных на предположении о сплошности среды, и впервые полученных С. Навье [147], а несколько лет спустя Дж. Стоксом [148].

Для замыкания данной системы ее необходимо дополнить еще одним уравнением, в качестве которого используется уравнение неразрывности. В векторной форме система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости может быть записана следующим образом [149]:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \right] = \rho \vec{f} - \nabla p + \nabla \cdot \underline{\tau},$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

где ∇ – оператор В. Гамильтона, в декартовой системе координат $\nabla = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$;

\otimes – символ тензорного произведения; ρ – плотность жидкости; \vec{u} – скорость потока в заданной точке; \vec{f} – вектор интенсивности массовых сил; p – гидродинамическое давление; $\underline{\tau}$ – тензор касательных напряжений, для ньютоновской жидкости $\underline{\tau} = 2\mu \underline{S}$, μ – молекулярная вязкость, $\underline{S} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T)$ – тензор скоростей деформаций. В таком случае с учетом уравнения неразрывности $\nabla \cdot \underline{\tau} = \mu \Delta \vec{u}$.

Подобная форма записи часто называется дивергентной [150]. Здесь учтено, что для несжимаемой жидкости конвективный член может быть представлен в следующем виде: $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})$.

Здесь и далее скорость движения жидкости будет обозначаться буквой u , чтобы избежать схожести написания с общепринятым обозначением кинематической вязкости ν .

В координатной форме (в декартовой системе координат) система уравнений Навье-Стокса записывается следующим образом [107]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j},$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$
(2.4)

где u_i – i -я компонента вектора скорости, $i, j = \{x, y, z\}$, p – гидродинамическое давление, ν – кинематическая вязкость жидкости, x_j – j -я ось декартовой системы координат, f_i – i -я компонента вектора интенсивности массовых сил. Здесь использовано правило суммирования по повторяющемуся индексу А. Эйнштейна [149, 151].

Для корректной постановки задачи систему уравнений (2.4) необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

В качестве начальных условий может быть выбрано состояние покоя рассматриваемой динамической системы:

$$u_j(x_i, 0) = 0, \quad p(x_i, 0) = p_0 \quad (2.5)$$

или же обтекание системы потоком жидкости со скоростью u_0 :

$$u_j(x_i, 0) = u_0, \quad p(x_i, 0) = p_0. \quad (2.5a)$$

На твердых поверхностях S должно выполняться условие прилипания:

$$u_j(x_i, t)|_S = 0. \quad (2.6)$$

Следует отметить, что условие (2.6) является допущением, подтвержденным многочисленными измерениями скорости потока вблизи стенок, согласно которым скорость действительно стремится к нулю при приближении к поверхности. Косвенным подтверждением справедливости условия (2.6) является то, что полученные на его основе результаты моделирования течений хорошо соответствуют экспериментальным исследованиям. Выполнение условия прилипания не зависит ни от материала, ни от состояния поверхности, ни от характеристик сплошной среды. Исключение могут составлять лишь сильно разреженные газы. Очевидно, что в случае движения тела в покое-щейся жидкости это условие будет записываться следующим образом:

$$u_j(x_i, t)|_S = u_j^0 + \varepsilon_{ij} \omega_i x_k \quad (2.6a)$$

На большом удалении от рассматриваемой системы должно выполняться условие отсутствия возмущений:

$$u_i(x_j, t) = 0, \quad p(x_j, t) = p_0. \quad (2.7)$$

для условия (2.5), или

$$u_i(x_j, t) = u_0, \quad p(x_j, t) = p_0. \quad (2.7a)$$

для условия (2.5a).

Непосредственное интегрирование системы (2.4-2.7) наталкивается на ряд трудностей, среди которых следует упомянуть следующие:

1. уравнение (2.4) представляет собою нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, то есть не имеет общего решения;
2. уравнение (2.4) содержит производные как по времени, так и по пространству;
3. уравнение (2.4) невозможно однозначно отнести к одной из классификационных групп дифференциальных уравнений, то есть тип их может меняться прямо в процессе расчетов, и, следовательно, могут потребоваться различные процедуры решения;

4. при решении инженерных задач граничные условия (и геометрические и динамические) могут быть очень сложны.

В силу указанных трудностей точное решение уравнений Навье-Стокса возможно лишь в небольшом количестве частных случаев [152], и исключительно для ламинарных течений. В то же время, подавляющее большинство течений, встречающихся на практике являются турбулентными. При этом теоремы существования и единственности глобального решения системы (2.4) также получены для ограниченного количества случаев [150, 152-156]. Поставленная в монографии О.А. Ладыженской [153] проблема о единственности слабого решения Хопфа (существующего на бесконечном промежутке времени) до настоящего времени остается нерешенной. То есть остается неясным, насколько адекватно уравнения Навье-Стокса описывают реальные течения жидкости. Более того, недавно Французская академия наук объявила о премии в миллион долларов тому, кто сможет найти решение этой проблемы (<http://claymath.org/>). Тем самым утверждение многих авторов о том, что прямое решение уравнений Навье-Стокса является наиболее точным способом исследования течений жидкости, пока не получает достаточного подтверждения, так как вопрос о доверии к получаемым из этих уравнений результатам остается открытым.

Известны попытки получить приближенные асимптотические решения уравнений Навье-Стокса, однако к настоящему времени они не увенчались успехом (например, [157-159]). Поэтому основным путем решения задачи (2.4-2.7) на сегодняшний день является использование численного моделирования.

Помимо системы (2.4) для исследования движения жидкости вполне возможно использовать и более общий подход, основанный на анализе исходных уравнений Больцмана [160, 161]. В начале XX века S. Chapman и D. Enskog был предложен асимптотический метод их решения, который в линейном приближении приводит к системе (2.4) [162]. Однако подходы такого рода в настоящее время недостаточно апробированы, а опубликованные результаты (например, [163-166]) относятся исключительно к движению газообразных сред. Применение же данных подходов к анализу движения капельных жидкостей в настоящее время требует непомерных машинных ресурсов, и нуждается в специальных исследованиях особенно с точки зрения моделирования нестационарных течений.

2.4. Основные подходы к моделированию турбулентных течений

В настоящее время можно выделить три основных подхода к решению задач динамики вязкой жидкости: прямое численное моделирование, решение осредненных по времени уравнений Навье-Стокса (уравнений Рейнольдса), и метод крупных вихрей. Помимо них существуют и различные гибридные подходы, содержащие в себе отдельные их черты.

Первый подход связан с непосредственным решением системы (2.4-2.7), два других используют преобразование уравнений Навье-Стокса, в результате которого отбрасываются мелкомасштабные турбулентные пульсации.

В последнее время рядом исследователей предпринимаются попытки проведения расчетов турбулентных течений без привлечения каких-либо моделей турбулентности (no-model simulations – “расчеты без модели” или “неполное” прямое численное моделирование). Подобные численные исследования в отдельных случаях (как для фундаментальных, так и ряда прикладных задач) позволяют получить приемлемые результаты при умеренных временных затратах. Однако применимость подобного метода исследования в общем случае нуждается в дополнительных исследованиях [167]. Ниже излагаются основные особенности указанных подходов.

2.4.1. Метод прямого численного моделирования

Метод прямого численного моделирования турбулентности (Direct Numerical Simulation, DNS) представляется наиболее логичным подходом, предоставляющим возможность всестороннего изучения турбулентных явлений в случаях, когда экспериментальные исследования затруднены или вообще невозможны.

Этот подход базируется на единственном предположении о том, что уравнения Навье-Стокса пригодны для описания любых движений сплошной среды. В приложении к рассматриваемым видам течений метод DNS предполагает решение дискретного аналога уравнений (2.4-2.7) без привлечения каких-либо дополнительных уравнений.

Для получения решения в рамках такого подхода все значимые временные и пространственные масштабы течения должны разрешаться полностью. Отношение наибольших и наименьших пространственных масштабов течения определяет число степеней свободы, необходимое для численного представления поля течения в любом из трех измерений. Наибольший масштаб турбулентных образований в ограниченной области имеет порядок характерного размера этой области (L).

В качестве наименьшего масштаба длины обычно выбирается диссипативный масштаб, введенный А.Н. Колмогоровым:

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4},$$

где ε - скорость диссипации энергии турбулентных пульсаций, оцениваемая как $\varepsilon = \frac{V^3}{L}$. Тогда для

отношения наибольшего масштаба к наименьшему (определяющего число степеней свободы, необходимо для представления поля течения) можно получить следующую оценку:

$$N = \frac{L}{\eta} = \text{Re}^{3/4}.$$

В работе Ю.Л. Климонтовича [168] приводится более скромная оценка числа степеней свободы:

$$N = \left(\frac{\text{Re}}{\text{Re}_{\text{кр}}} \right)^{9/4},$$

где $\text{Re}_{\text{кр}}$ – критическое число Рейнольдса.

Кроме того, чтобы результаты были пригодны для определения средних величин расчеты должны продолжаться L/U секунд, где U – характерная скорость, а шаг по времени не должен превышать величину l/U , следовательно, для одного расчетного случая необходимо выполнить Re^n шагов по времени. Тогда суммарное число шагов по времени должно иметь порядок $\text{Re}^{4n} \geq \text{Re}^3$.

Принимая во внимание эти соотношения, и учитывая порядок числа Рейнольдса природных морских объектов, а также мощность современных вычислительных машин, можно утверждать, что для решения задач динамики морских подвижных объектов метод DNS в ближайшие годы вряд ли получит распространение¹.

Тем не менее, результаты прямого численного моделирования турбулентности даже при сравнительно невысоких значениях числа Рейнольдса являются весьма востребованными. Детальный анализ результатов таких расчетов может способствовать прояснению физических механизмов, определяющих специфику тех или иных течений, послужить надежной опорой при разработке тестировании подходов, позволяющих моделировать течения при реальных числах Рейнольдса.

¹ Пусть $\text{Re}=10^8$, тогда потребное количество узлов $N=(10^8)^{9/4}=10^{18}$, а число шагов по времени $N_t=(10^8)^3=10^{24}$, то есть суммарное число операций $10^{18} \cdot 10^{24}=10^{42}$ – столько раз надо решить систему уравнений Навье-Стокса. Таким образом, решение системы на кластере производительностью 2,5 ГФлопс займет не меньше 10^{30} лет. Здесь уместно отметить, что возраст вселенной оценивается в 10^{10} лет [169].

Прямое численное моделирование впервые, по-видимому, было использовано в работе S.A. Orszag и G.S. Patterson [170]. В работе Шумана и др. [171] произведено прямое численное моделирование вторичных течений в канале, а Н.В. Никитиным был осуществлен расчет турбулентного течения в круглой трубе [172]. Обзоры результатов, полученных на базе прямого численного моделирования турбулентности можно найти в работах [171, 173-175]. В целом можно сказать, что полученные результаты вполне соответствуют экспериментальным исследованиям по качеству, и сильно превосходят его по количеству получаемой информации. Однако следует учитывать, что существующие в настоящее время вычислительные мощности ограничивают применение прямого численного моделирования ламинарными течениями в простых геометрических конфигурациях.

Динамика роста производительности вычислительных машин хорошо продемонстрирована в работе J. Jimenez [176]. По оценкам автора этой работы расчет развитой турбулентности вблизи реальных объектов для хорошо разделенных интервалов энергии и диссипации требует $10^{12} - 10^{15}$ точек. Такое число точек по мнению J. Jimenez может быть рассчитано лишь в отдаленном будущем. Действительно, в 1987 году было рассчитано турбулентное течение с $Re^* = 180$, в 1997 году с $Re^* = 590$, в 2003 году с $Re^* = 950$, где $Re^* = u_* \delta / \nu$ (здесь u_* - динамическая скорость, δ - толщина вязкого подслоя, ν - коэффициент кинематической вязкости).

Однако, как упоминалось ранее, до настоящего момента отсутствует доказательство существования сильного решения уравнений Навье-Стокса в трехмерном пространстве при больших числах Рейнольдса и на больших промежутках времени. Это делает спорными любые выводы, сделанные на основе решения данных уравнений.

2.4.2. Метод решения осредненных по времени уравнений Навье-Стокса

Одним из вариантов обхода указанных выше трудностей является путь, предложенный сэром О. Рейнольдсом [177]. Он состоит из следующих шагов:

- величины, входящие в полные уравнения Навье-Стокса разделяются на осредненные и пульсационные: $\phi = \bar{\phi} + \phi'$, длинная черта сверху обозначает операцию осреднения на конечном интервале времени T , например $\bar{\phi} = \frac{1}{T} \int_0^T \phi dt$;

- уравнения движения осредняются на конечном интервале времени, при этом очевидно, что

$$\overline{u'_i} = \overline{p'} = \overline{\rho'} = 0, \text{ где } \rho' - \text{пульсация плотности.}$$

Полученная система уравнений называется системой уравнений Рейнольдса, и для несжимаемой жидкости выглядит следующим образом:

$$\rho \left[\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right] = \rho \overline{f_i} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} - \overline{\rho u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2.9)$$

Соответствующим образом меняются и краевые условия (2.5-2.7).

Сравнивая (2.8) с исходным уравнением Навье-Стокса (2.4) можно увидеть, что оно содержит один дополнительный член, а именно

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \tau'_{ji} = \tau'_{ji,j} = -\overline{\rho u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}.$$

На основе (3.18) его можно переписать следующим образом:

$$\tau'_{ji,j} = -\rho \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_j u'_i}, \text{ т.е. } \tau'_{ji} = -\overline{\rho u'_j u'_i}, \text{ или } \underline{\tau}' = -\overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}.$$

Таким образом, дополнительный член уравнения (2.8) - это дивергент некоторых напряжений, являющихся результатом взаимодействий между флуктуациями в поле течения, и носящих название турбулентных напряжений или напряжений Рейнольдса. Напряжения Рейнольдса появляются вследствие реакции потока на конвективный перенос количества движения через жидкие площадки вследствие пульсаций скорости.

Уравнения О. Рейнольдса для несжимаемой жидкости в векторной форме можно записать следующим образом

$$\rho \left[\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}} \otimes \overline{\mathbf{u}}) \right] = \rho \overline{\mathbf{f}} - \nabla p + \nabla \cdot \underline{\tau} + \nabla \cdot \underline{\mathbf{R}}, \quad (2.8a)$$

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{u}} = 0$$

здесь черта над осредненными величинами для удобства опущена, $\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{I}}'$ - тензор напряжений Рейнольдса.

Очевидно, что система уравнений О. Рейнольдса (2.8-2.9) является незамкнутой, так как содержит заранее неизвестные компоненты тензора турбулентных напряжений. Для ее замыкания используются специальные реологические соотношения, называемые моделями турбулентности.

В настоящее время наиболее распространенным путем замыкания уравнений Рейнольдса является использование гипотезы Ж. Буссинеска об изотропной турбулентной (вихревой) вязкости. Согласно этой гипотезе для турбулентных напряжений можно ввести соотношение, аналогичное гипотезе И. Ньютона для вязких напряжений [178]:

$$\tau'_{ij} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij},$$

где μ_t – турбулентная вязкость, S_{ij} – тензор осредненных скоростей деформаций, $k = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i}$ – кинетическая энергия турбулентных пульсаций. Второй член необходим с целью выполнения условия $\overline{u'_i u'_i} = 2k$ во всем поле течения.

Такие модели турбулентности называются линейными моделями турбулентной вязкости.

Величина турбулентной вязкости μ_t самим Ж. Буссинеском принималась постоянной для всей области течения, но такой подход себя не оправдал. Дальнейшее развитие концепции вихревой вязкости было связано с введением Л. Прандтлем понятия длины перемешивания (смешения) [179]. Такой подход позволил получить в замкнутой форме решение для турбулентного течения в прямой трубе и каналах, продемонстрировав хорошее согласование между теорией и экспериментом [180]. Более поздние исследования Т. фон Кармана привели к созданию расчетных методов определения величины пути смешения, что позволило получить распределение важнейших характеристик турбулентности для ряда течений в аналитическом виде, в частности, для плоского течения Куэтта между двумя плоскими стенками, одна из которых перемещается с постоянной скоростью [181]. Однако общим недостатком алгебраических моделей оказалась практическая невозможность распространить их на течения со сложной геометрией [182], в результате появилась потребность создания более совершенных моделей.

Настоящий прорыв в исследовании турбулентности связан с именем А.Н. Колмогорова, которому удалось получить несколько основополагающих результатов [183, 184]. Эти результаты определили развитие теории турбулентности на многие годы. Дальнейшие успехи в исследовании турбулентности связаны с именами О.М. Белоцерковского, В.Е. Захарова, Б.И. Давыдова, Л.Ф. Козлова, С.С. Кутателадзе, Ю.В. Лапина, Л.Г. Лойцянского, М.Д. Миллионщикова, А.С. Мони́на, В.В. Новожилова, А.М. Обухова, Б.Л. Рождественского, А.Н. Секундова, М.Х. Стрельца, А.М. Яглома, B.S. Baldwin, G.K. Batchelor, P. Bradshaw, J.O. Hinze, E. Hopf, R.H. Kraichnan, B.E. Launder, F.R. Menter, H.K. Moffatt, S.A. Orszag, P.G. Saffman, T.H. Shih, P.R. Spalart, D.B. Spalding, C.G. Speziale, D.C. Wilcox, V. Yakhot, и многих других.

С дальнейшим развитием теории турбулентности были выделены наиболее перспективные модели вихревой вязкости, основными из которых стали так называемая «стандартная» k - ϵ модель В.Е. Launder и W.P. Jones [185], k - ω модель D.C. Wilcox [186], и гибридная SST k - ω модель F. Menter [187, 188].

Положенная в основу этих моделей гипотеза скалярной турбулентной вязкости в целом вызывает серьезные сомнения из-за несовпадения в общем случае главных осей тензора напряжений Рейнольдса, и тензора скоростей деформаций [189, 190]. Однако, для многих течений они позволяют получать вполне достоверные результаты.

Двухпараметрическая диссипативная модель (« k - ϵ модель») обладает определенными преимуществами перед другими подобными моделями и до сих пор широко используется в приложениях, хотя обладает и рядом недостатков (например, плохо работает для вращающихся течений вроде кругового течения Тэйлора-Куэтта). Были предприняты попытки вывести k - ϵ модель непосредственно из уравнений Навье-Стокса методом ренормализационной группы [191-194]. Эту разновидность называют «RNG k - ϵ моделью», она отличается от исходной в частности тем, что коэффициент пропорциональности между турбулентной вязкостью и выражением определяется аналитически. Однако G.L. Eyrink [195] указал, что отброшенные в этой модели члены уравнений имеют тот же порядок что и оставленные.

В последние годы активно разрабатываются однопараметрические модели турбулентности [196-198]. Очень интересна в этом контексте работа Ф. Ментера [197], в которой обосновывается соображение об избыточности одного из уравнений в k - ϵ модели турбулентности. К сходному мнению пришел путем детального анализа этой модели А.Н. Секундов [196]. Одной из наиболее распространенных моделей этой группы является модель P.G. Spalart и S.R. Allmaras [199], калиброванная для моделирования внешних задач аэродинамики. В.А. Павловский [178] предложил однопараметрическую модель переноса скалярного параметра турбулентности в заданной точке потока. Важной особенностью этой модели является наличие коэффициента молекулярной вязкости, что позволяет ее использовать во всей области пристеночного турбулентного течения (от вязкого подслоя до перемежаемости турбулентности). Дальнейшее развитие эта идея получила в работах В.В. Павловского и Д.В. Никущенко [200, 201].

Более сложный подход к замыканию уравнений Рейнольдса базируется на использовании уравнений, выводимых непосредственно для компонент тензора турбулентных напряжений [202]. Наряду с последовательным учетом анизотропии турбулентности, преимуществом такого подхода является потенциальная возможность точного учета динамически важных турбулентных взаимодействий, эффектов вращения, плавучести и т.п.

Данный класс моделей в силу целого ряда причин пока не получил столь же широкого распространения, как модели турбулентной вязкости, в частности из-за высокой требовательности к вычислительным ресурсам. Кроме того, для получения замкнутой системы требуется введение большого числа отдельных членов, входящих в уравнения переноса напряжений Рейнольдса. Однако описание их весьма осложнено в связи с недостаточностью необходимой для их настройки информации (данных экспериментальных исследований или прямого численного моделирования).

Одно из перспективных направлений моделирования турбулентности связано с каскадными или оболочечными (shell) моделями турбулентности. Предполагая, что процесс передачи энергии в спектральном (Фурье) пространстве приблизительно локализован, уравнения Навье-Стокса можно существенно упростить, тогда путем численного интегрирования можно исследовать достаточно тонкие свойства полученных упрощенных уравнений. К сожалению, содержательные результаты получены до сих пор в основном лишь для изотропной турбулентности [203-205], и лишь в работе [203] исследуется анизотропная турбулентность, однако подход и изложение проблемы представляются излишне сложными.

Наряду с рассмотренными ранее феноменологическими теориями существуют также статистические теории турбулентности, использующие для определения статистических характеристик потока аппарат теории вероятности [206]. Однако, к сожалению, до настоящего времени такой подход не позволил пока получить реально работающей методики расчета каких-либо течений.

Все сказанное выше позволяет констатировать, что на данный момент не существует универсальной модели турбулентности, пригодной для моделирования широкого диапазона течений. Выбор модели турбулентности для исследования конкретного течения зависит от характера турбулентного потока, требуемой точности, доступных вычислительных ресурсов, и временных затрат необходимых на процесс моделирования. Практически невозможно дать надежную рекомендацию по выбору модели турбулентности при решении инженерных задач.

2.4.3. Метод крупных вихрей

Модель крупных вихревых структур (Large Eddy Simulation, LES) использует альтернативный подход, в котором большие вихри решены в нестационарной постановке с использованием системы, так называемых, «фильтрующих» уравнений. Набор «фильтрующих» уравнений по существу служит для исключения из расчета подсеточных (SubGrid Scale, SGS) вихрей, т.е. вихрей, размер которых меньше ячеек расчетной сетки. При этом как правило предполагается, что линейный масштаб расчетной сетки не превосходит интегральный масштаб турбулентности в данной области потока. Как и в случае применения осреднения по Рейнольдсу процесс фильтрации требует добавления специальных уравнений для замыкания всей системы [207].

Статистические величины осредненного потока, которые в основном и имеют практический интерес, представляются в зависимости от времени. Привлекательность LES модели заключается в том, что она рассчитывает потери, вызванные самим режимом турбулентного течения, в отличие от моделей турбулентности относящихся к классу RANS. Возможно, это качество делает ее «универсальной» для расчета турбулентных течений с тенденцией мелкомасштабных вихрей, что имеет место в ярко выраженных изотропных потоках, т.е. когда макроскопические особенности потока преобладают над крупномасштабными вихрями. Более того, тот факт, что в режимах развитой турбулентности закономерности мелкомасштабного движения близки к универсальным (т.е. слабо зависят от типа течения и граничных условий), служит обоснованием естественных ожиданий, что для описания неразрешаемого движения в рамках LES могут быть использованы относительно простые, не требующие детальной настройки модели (см., например, [175, 208]). Данный подход был использован J.W. Deardorf [209] для исследования течения в круглой трубе. Позднее A. Leonard [210] показал, что если внутри ячейки изменяется, то при фильтрации могут возникать дополнительные напряжения (напряжения Леонарда). Хороший анализ проблем метода крупных вихрей выполнен в обзоре U. Piomelli и E. Balaras [211].

В методе крупных вихрей расчетная область разделяется на внешнюю область и внутреннюю, примыкающую к стенке. В случае простых геометрических характеристик потока течение во внутренней области описывается пристеночными функциями (например, логарифмическим профилем Л. Прандтля и Т. фон Кармана), либо упрощенными уравнениями гидродинамики. Течение во внешней области рассчитывается с использованием параметризации Смагоринского, или же с помощью иных соображений о связи подсеточных напряжений с тензором градиента осредненной скорости (например, [212]). Иногда для параметризации подсеточных эффектов используют соображения подобия, ренормализационной группы или условного осреднения [213]. Повидимому, наиболее перспективным в этом подходе является поиск аналитической структуры для мелкомасштабной составляющей турбулентности. Наибольший интерес в этом смысле вызывают подход, предложенный в работе [214], вихрь Бюргерса [215] и вихрь Лунгрена [216]. Следует отметить, что при стремлении времени к бесконечности один вихрь переходит в другой. Развитие этого направления отражено в работах. Одна из трудностей данного подхода состоит в аналитическом описании вихря для произвольного вида тензора градиента скорости. Этот вопрос обсуждался в работах. Однако неясно, какой именно вклад эти вихри дают в подсеточные напряжения.

На сегодняшний день успешное применение модели LES для решения инженерных задач было осуществлено только в достаточно простых геометрических областях [217], что в основном связано с высокими требованиями данной модели к вычислительным ресурсам. Модель LES использует пространственную дискретизацию высокого порядка, что позволяет разрешить больший диапазон масштабов турбулентности, однако при этом имеет место ухудшенная точность решения осредненных параметров потока в LES модели, что не всегда указывается авторами.

Таким образом, использование LES для практических расчетов в настоящее время затруднительно в связи с большими требованиями к вычислительным ресурсам. Тем не менее, данный подход представляется весьма перспективным, и постепенно выйдет на ведущие позиции в области моделирования турбулентных течений.

3. Общая характеристика коммерческих расчетных комплексов

На сегодняшний день программное обеспечение (ПО), используемое для решения прикладных задач гидродинамики, может быть условно сведено в следующие группы:

1. «Верхнего уровня». Такое ПО предназначено для решения широкого круга инженерных и исследовательских проблем. Пакеты данной категории создаются крупными (в том числе транснациональными) корпорациями, содержат большое количество математических моделей, численных схем, развитые средства пре- и постпроцессинга (то есть подготовки исходных данных и обработки полученных результатов). Они имеют развитую поддержку, хорошо отлажены и документированы. При использовании ПО этого класса все задачи условно разделяются на « типовые » (на которых пакет тестировался и отлаживался, например, моделирование проточных частей турбомашин) и « нетиповые ». Это следует учитывать, решая вопрос о применении такого ПО для решения конкретной задачи. Эти пакеты основаны на кодах, разработанных в университетах или небольших компаниях, и развитые в дальнейшем в законченные коммерческие продукты. Среди них в первую очередь следует упомянуть Fluent, CFX, Star-CD/CCM, NUMECA;

2. «Нижнего уровня». Это также универсальное ПО, предназначенное для решения ограниченного круга проблем. Оно чаще всего имеет ограниченную область применения, и по многим позициям уступает пакетам «верхнего» уровня. Примерами таких разработок могут служить FlowVision, SINF (в России), AQUA, PowerFlow, FlowWorks (за рубежом), и другие;

«Исследовательское». Это авторское, корпоративное или университетское ПО, разработанное небольшими авторскими коллективами для решения конкретного класса задач. Такое ПО чаще всего хранится в исходных кодах, плохо документировано и нередко имеет трудности с модернизацией. Оно не содержит вообще или имеет нужные инструменты (например, сеточный генератор) ограниченной функциональности. Тем не менее, подобное ПО быстрее всего реагирует на появление новых математических моделей и численных схем, может служить своего рода испытательным полигоном для последующей отладки алгоритмов для пакетов иных групп. В целом оно является единственным способом решения принципиально новых научных проблем.

3. Очевидно, что производить сравнение указанного ПО уместно в том случае, если оно принадлежит к одному классу. Поэтому в дальнейшем основное внимание будет уделено сравнению таких пакетов как ANSYS Fluent®, ANSYS CFX®, Star-CD® и NUMECA FINE/Marine®, основные их характеристики приводятся в Таблице 5.

Таблица 5. Некоторые особенности наиболее популярных в настоящее время расчетных комплексов

	FLUENT®	CFX®	STAR-CD®	FINE/Marine®
Математические модели	Огромное количество моделей для расчетов ламинарных и турбулентных течений, горения, многофазных сред, радиации и многого другого. Быстро развивающиеся LES и DES модели, сильно превосходящие их реализации у конкурентов	Большое количество моделей, SAS [218], много модификаций SST, но реализация RSM объективно хуже, чем во FLUENT	Большое количество моделей, реализована нелинейная k-ε модель	Специализированное средство для моделирования задач корабельной гидродинамики. Имеет развитые средства задания законов движения объекта в бассейне (например, наличие разгонного участка), движения на роторивный установке, и т.п. Моделирование регулярно/нерегулярного волнения. Имеет нелинейную k-ε модель, DES
Решатель	4 вида решателей, реализованы отдельные решатели для двумерных и трехмерных задач, адаптированный временной шаг	1 решатель, отдельных решателей для двумерных и трехмерных задач нет, адаптированного временного шага нет	1 решатель, отдельных решателей для двумерных и трехмерных задач нет, адаптированного временного шага нет	1 решатель, отдельных решателей для двумерных и трехмерных задач нет, есть динамическая адаптация сетки

Устойчивость численных схем	Несколько уступает в устойчивости и скорости счета (на 3D задачах) решателю CFX, но, видимо, более точный. Реализовано две схемы 3-го порядка	Качественный и быстрый решатель, основанный на методе конечного объема, по-видимому с некоторыми элементами МКЭ	Есть MARS	Имеет противопоточные схемы первого и второго порядка, схем третьего порядка нет. Решатель допускает значения числа Куранта до 150
Динамические, адаптивные и движущиеся сетки	Реализована работа с динамическими сетками	Поддержка динамических сеток есть, но не реализовано перестроение сетки	Хорошая реализация динамических сеток	Хорошая реализация адаптивных и подвижных сеток
Сеточный генератор	В комплект поставки входят два СГ – TGrid и Gambit. Возможности их позволяют строить структурированные и неструктурированные сетки в любых геометрических областях.	В комплект поставки входит неструктурированный СГ, сильно уступающий конкурентам. Основным средством построения сеток должен служить независимый СГ ICEM (также выпускаемый компанией Ansys), являющийся одним из лучших СГ на рынке и поставляющийся отдельно. Надо добавить, что ICEM позволяет создавать сетки и для Fluent, Ansys и многих других вещей	Собственный СГ pro-am, позволяющий строить различные сетки, работа с геометрией объекта более удобна, чем, например, в Gambit, но качество построенных сеток на наш взгляд уступает двум первым пакетам	Автоматический сеточный генератор структурированных (Hexpress) и неструктурированных (Hexpress/Hybrid), позволяющий получать сетки высокого качества. Имеет экспорт в Ansys и Fluent
Постпроцессинг	Мощные средства анализа результатов. В части представления практически	Мощные средства анализа результатов. В части представления практически	Также имеет развитые средства представления результатов. Однако требует	Содержит средство для анализа результатов CFView, ни в чем не уступа-

	не уступает специализированным средствам (например, Tecplot)	не уступает специализированным средствам (например, Tecplot). Структура пакета такова, что постпроцессор вынесен в отдельное приложение. Соответственно одновременно использовать решатель и постпроцессор затруднительно	опыта и навыков. На взгляд автора он в использовании гораздо менее удобен, чем два первых.	ющее остальным рассмотренным пакетам.
Расширяемость	Практически любая величина (или уравнение) в решателе может быть перепрограммирована на языке C или Fortran	Для изменения настроек решателя реализован свой собственный скриптовый язык. Причем программирование разных частей кода ведется на разных диалектах языка		

Среди разрабатываемых в России пакетов наиболее развитым на взгляд автора является «FlowVision». Однако на сегодняшний день он очень существенно уступает продуктам «верхнего» уровня. Как и в комплексе NUMECA, в нем реализовано полностью автоматическое построение сеток, однако эти сетки исключительно ортогональные, и в сравнительно сложных геометрических областях низкого качества. Серьезным недостатком является отсутствие пограничного слоя (т.е. процедуры сгущения сетки вблизи твердых поверхностей). Этот факт особенно неприятен при решении задач корабельной гидродинамики, так как доля сил трения в силовом балансе у корабельных объектов очень велика, и может достигать 90% полного значения. Поддержки движущихся и деформирующихся сеток нет. Скорость счета ниже, чем у пакетов «верхнего» уровня, что, по-видимому, обусловлено организацией процедуры построения контрольных объемов.

3.1 Общая структура процесса решения инженерной задачи на основе методов вычислительной гидромеханики

Схематично процесс решения задачи можно представить следующим образом (Рис. 3).

На первом этапе (Pre-processing) производится определение целей и средств моделирования, осуществляется построение геометрии объекта; декомпозиция расчетной области (разбивка области на подобласти) и построение сетки; постановка граничных условий.

На втором этапе построенная геометрия передается в решатель (solver), после чего производится выбор настроек расчета (задание параметров расчета, свойств материалов, выбор дополнительных моделей (для моделирования турбулентности, горения, радиации и т.п.)), задается начальное приближение, и производится собственно решение поставленной краевой задачи.

На третьем этапе (post-processing) осуществляется анализ полученных результатов, а также принимается решение об окончании, или продолжении процесса решения задачи.

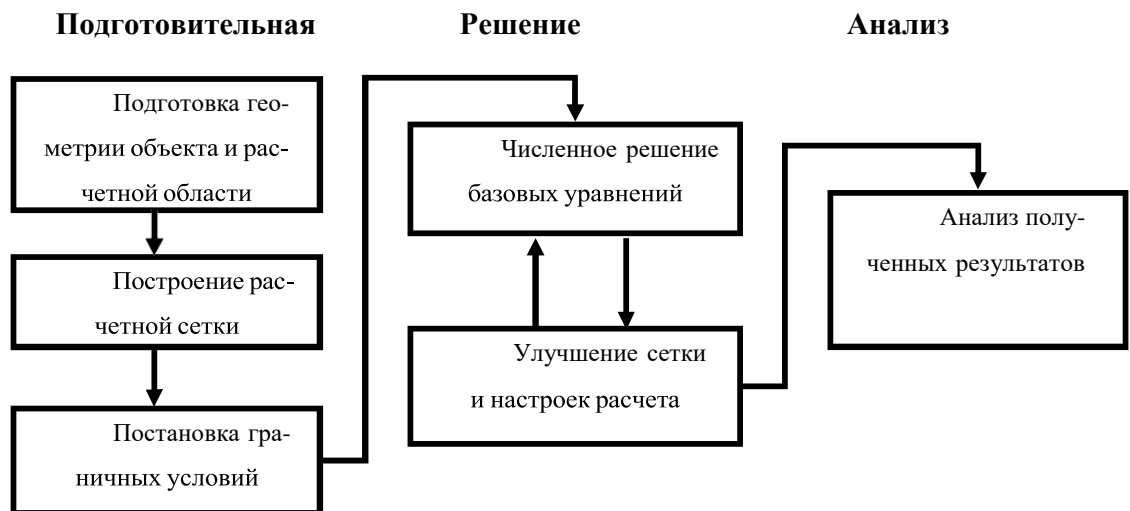


Рис. 3. Общая схема процесса решения задачи.

В поставку комплекса FLUENT® входят два препроцессора – TGrid и Gambit, основным назначением которых является построение сетки. Кроме того, на рынке также имеются другие подобные продукты (ICEM®, Hexpress®, и т.п.). Конечно, с их помощью можно построить относительно несложную геометрию, и произвести декомпозицию области, однако такие операции лучше производить при помощи специализированных программных средств твердотельного моделирования, таких как Catia®, Unigraphics®, ProEngineer® и т.п.

Следует добавить, что на взгляд автора [67] особый интерес представляет генератор Hexpress®, реализующий алгоритм полностью автоматического построения сеток в геометрически сложных расчетных областях. Процесс построения сетки схематично приведен на Рис. 4.

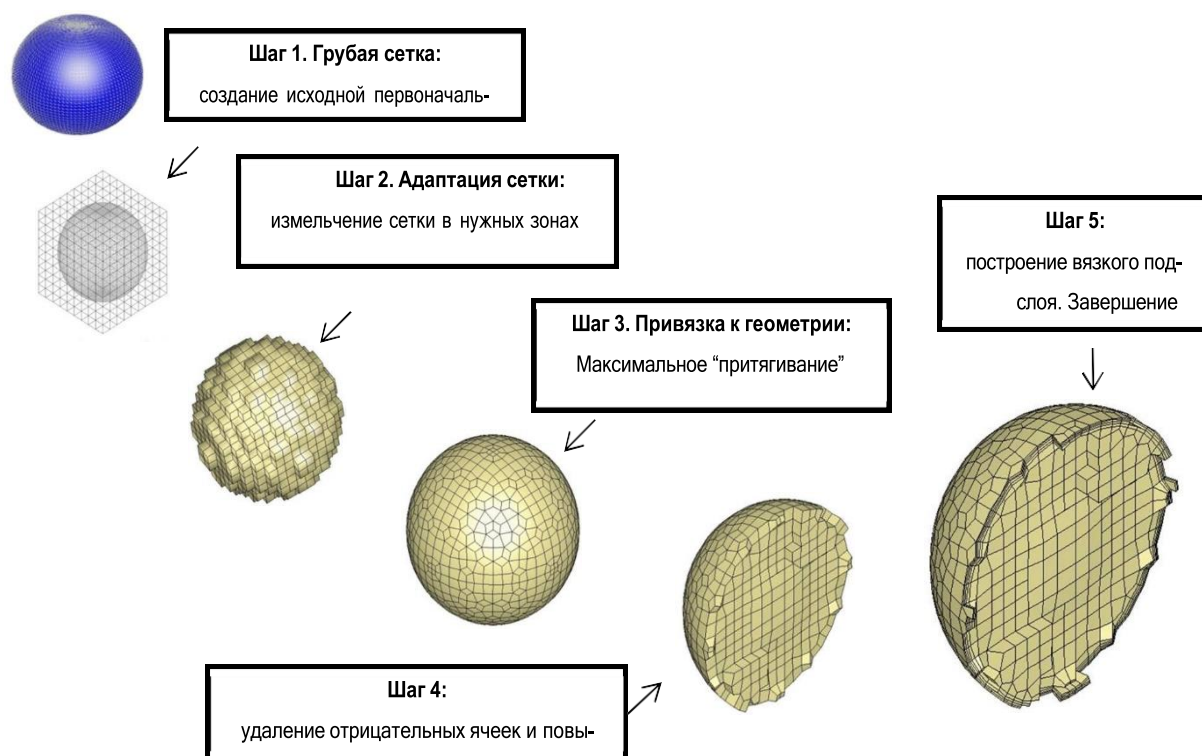


Рис. 4. Автоматическое построение сетки в HEXPRESS™.

Можно видеть, что создание сетки состоит из пяти основных шагов [219]:

1. Создание начальной сетки (initial mesh) - на этом шаге расчетная область полностью заполняется элементами;
2. Адаптация сетки: обрезание сетки в областях, где начальное приближение выходило за пределы расчетной области, и сгущение ее к заданным поверхностям или ребрам. Генератор HEXPRESS™ имеет развитые, гибко настраиваемые средства измельчения сетки;
3. Привязывание к геометрии: после адаптации ячейки сетки, выходящие за пределы расчетной области, удаляются. Операция привязки к геометрии обеспечивает снос приграничных узлов на поверхность расчетной области, обеспечивая точное выполнение граничных условий;
4. Улучшение сетки: после выполнения предыдущего шага ряд приграничных ячеек искажается, что может привести к ухудшению качества сетки. В ходе операции улучшения генератор HEXPRESS™ производит анализ характеристик ячеек (таких как угловая скошенность, наличие отрицательных объемов, и т.д.) и соответствующее перестроение элементов сетки;
5. Построение вязкого подслоя (пограничного слоя): обеспечение заданного сгущения сетки к твердым стенкам и т.д.

Каждая из перечисленных операций является гибко настраиваемой, что обеспечивает высокое качество построения расчетной сетки.

Пример построенной сетки вблизи корпуса судно (в диаметральной плоскости) приведен на Рис. 5.

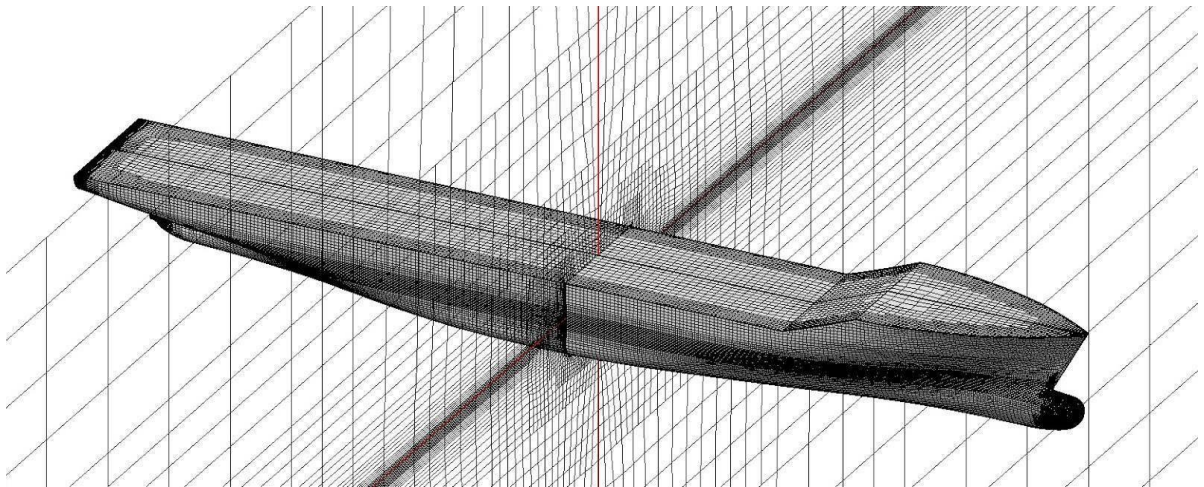


Рис. 5. Пример сетки, построенной в HEXPRESS™

3.2 Основная система уравнений

Как уже упоминалось, в основе всех обсуждаемых расчетных комплексов лежит система уравнений О. Рейнольдса (2.8а), записанная в форме обобщенного уравнения переноса [220]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \nabla \cdot (\rho \bar{u} \phi - \Gamma_{\phi} \nabla \phi) = S_{\phi}, \quad (2.9)$$

где ϕ - скалярная функция, Γ_{ϕ} - коэффициент диффузии, \bar{u} - вектор скорости, S_{ϕ} - источниковый член, который может содержать также те составляющие диффузионного переноса, которые не вошли в каноническую форму диффузионного члена.

В этом случае для получения уравнения неразрывности необходимо принять $\phi = 1$, уравнений Навье-Стокса (Рейнольдса) - $\phi = \{v_x, v_y, v_z\}$, энтальпии - h , и т.д. Вводя в рассмотрение функциональное пространство $\phi = [u, p, k, \varepsilon]^T : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, обобщенное уравнение переноса можно записать в таком виде [85]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i D_i \phi - \sum D_i v_i D_i \phi = f, \quad Q = \Omega \times [0, T], n=3$$

где $D_i = \partial / \partial x_i$, f - заданная функция на $\Omega \times [0, T]$. Краевые условия приведены выше.

Использование обобщенного уравнения переноса обусловлено с одной стороны требованием консервативности при записи уравнений, а с другой - соображениями удобства программной реализации вычислительного алгоритма. Также как и уравнение Навье-Стокса оно отражает баланс изменений величины ϕ , обусловленных нестационарными эффектами, конвективным и диффузионным переносом, и рядом иных факторов, характерных именно для рассматриваемого процесса, учитываемых в источниковом члене.

Для решения уравнения (2.9) в расчетных комплексах, как правило, используется процедура метода конечного объема [150, 221], в результате применения которой исходное дифференциальное уравнение сводится к системе алгебраических уравнений. С целью создания универсального алгоритма решения задач динамики жидкости все дополнительные уравнения (моделей турбулентности, энергии, движения дискретных фаз и прочие) также представляются в форме (2.9) [220], поэтому для решения всех уравнений модели в конечном итоге используется единая процедура решения.

3.3 Дискретизация уравнений движения вязкой жидкости

Для численного решения уравнений динамики вязкой жидкости наиболее широкое применение получили подходы на основе метода сеток.

Сущность метода сеток заключается в том, что искомая непрерывная функция аппроксимируется набором приближенных значений в некотором множестве точек, называемых узлами. Совокупность узлов, определенным образом между собой связанных, называется сеткой, которая, в свою очередь, становится дискретной моделью области определения искомой функции.

Обзор различных методов можно найти в литературе (см, например, [71, 72]). Ниже будут рассмотрены основные особенности наиболее популярных из сеточных методов, а именно метода конечных разностей (МКР), метода конечных элементов (МКЭ), и метода конечного объема (МКО).

3.3.1 Метод конечных разностей

Метод конечных разностей (МКР) [71, 222] является самым естественным и старейшим методом решения краевых задач. Общий алгоритм метода можно сформулировать следующим образом:

1. Построение сетки в заданной области. Приближенные значения ϕ_P искомой величины ϕ определяются именно в узлах сетки, совокупность узловых значений ϕ_P называются сеточной функцией;

2. Построение разностного аналога путем замены дифференциального оператора $L_\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ в исходном дифференциальном уравнении разностным оператором L_P , при этом исходная функция аппроксимируется сеточной функцией ϕ_P ;
3. Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений.

Несмотря на внешнюю простоту метода, его численная реализация может быть весьма сложной. Причем сказанное касается всех выделенных этапов. В частности, при построении сетки для произвольной области сетка в общем случае будет нерегулярной, причем особенности ее геометрии будут учитываться только в приграничных узлах.

Существует множество разновидностей МКР, среди которых в приложении к решению задач динамики жидкости следует особо отметить метод частиц в ячейках (PIC-метод), разработанный Ф. Харлоу в 1955 г., и метод крупных частиц, разработанный О.М. Белоцерковским и Ю.М. Давыдовым [223].

Разностные схемы, применяемые в МКР, следует использовать весьма осмотрительно, так как даже для простых линейных задач логичная разностная схема может давать решение, не сходящееся к точному при измельчении сетки [71]. Поэтому при применении МКР для построения универсальных расчетных систем используются схемы, хорошо зарекомендовавшие себя именно для тех задач, для решения которых и создается система. В этой связи получили распространение методы, лишенные указанных недостатков.

Однако МКР и в настоящее время развиваются, что можно видеть, например, по работам [224, 225]. Например, в работе [224] предложен метод погруженной границы с фиктивным узлом для решения уравнений Навье-Стокса. Показано, что для этого необходима явная форма уравнений уравнение Пуассона для давления. Присутствие криволинейной границы учитывается добавлением в правую часть этих уравнений источникового члена, выражение для которого конструируется так, чтобы принимать различные значения для узлов декартовой сетки, лежащих внутри расчетной области и прилегающих к криволинейной границе. Применение подобных подходов облегчает применение метода в геометрически сложных областях, что существенно расширяет область его применения.

3.3.2 Метод конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) первоначально был предложен для решения задач строительной механики [72, 222, 226], однако в дальнейшем область применения его была сильно рас-

ширена, после чего он быстро завоевал популярность, и в настоящее время широко используется в инженерной деятельности.

Основными преимуществами МКЭ являются простота использования, применимость для областей со сложными границами. Следует также отметить высокую степень универсальности метода, что позволяет использовать один и тот же алгоритм при решении различных инженерных и исследовательских задач, а это в свою очередь способствует созданию универсальных программных комплексов применимых для решения большого комплекса проблем, связанных с исследуемым (проектируемым) объектом.

В МКЭ искомая непрерывная функция аппроксимируется кусочно-непрерывной, определенной на множестве конечных элементов. Как правило, в качестве аппроксимирующей функции выбираются полиномы, подобранные таким образом, чтобы обеспечить непрерывность искомой функции в узлах на границах элементов.

Общий алгоритм МКЭ:

1. Разбивка области определения искомой функции с помощью сетки на подобласти – выделение конечных элементов;
2. Определение аппроксимирующей функции для каждого элемента. Значение непрерывной функции в произвольной точке k – го конечного элемента записывается в следующем виде: $\phi^k = A^0 + A^k R$, где A – коэффициенты полинома, $R(x, y, z)$ – координатная функция в рассматриваемой точке. Таким образом, необходимо найти вектор A . Для этого его выражают через вектор узловых значений Φ^k и координаты узлов, откуда $\phi^k = N^k \Phi^k$, где N^k – так называемые функции формы конечного элемента, сопоставляющие координаты точки и узлов;
3. Объединение конечных элементов в ансамбль - строится система алгебраических уравнений $\phi = N \Phi$;
4. Определение вектора узловых значений функции Φ . Самая трудная задача в МКЭ.

Форма конечных элементов может быть различной. Простейшими являются треугольные или четырехугольные элементы, стороны которых - отрезки прямых. Возможно также применение криволинейных элементов.

В каждом конечном элементе неизвестная функция аппроксимируется полиномом, степень которого меняется в зависимости от задачи, но остается обычно невысокой (от 1 до 6). Для каждого элемента аппроксимирующий полином определяется его коэффициентами, которые могут быть определены значениями функции в частных точках называемых узлами элемента. Если известна функция в каждом узле, то имеется возможность ее аппроксимации на всей области.

Можно также сказать, что неизвестная функция $A(x,y,z)$ зависит от A_1, A_2, \dots, A_m являющихся неизвестными, которые функция принимает в каждом узле каждого элемента. Определение параметров является этапом определения $A(x,y,z)$.

В соответствии с вариационным принципом исходная задача может быть записана следующим образом:

$$\min_A \left\{ \varphi(A) = \iiint_{\Omega} [A, A'_x, A'_y, A'_z, x, y, z] dx dy dz \right\}.$$

Тройной интеграл заменяется суммой интегралов в каждом конечном элементе области:

$$\phi(A) = \sum_{k=1}^{N_e} \phi_k(A), \text{ где } N_e - \text{число элементов разбиения и } \phi_k - \text{часть } \varphi \text{ на элементе с номером } k. \text{ На}$$

каждом элементе с номером e функция A может быть заменена ее аппроксимацией $A = P(A^k, x, y, z)$, интегрирование которой дает $\varphi(A)$ в виде функции одних только параметров элемента e : $\phi_e(A) = \phi(A^k)$. После суммирования получается следующее:

$$\phi(A) = \sum_{k=1}^{N_e} \phi_k(A) = \phi(A_1, A_2, \dots, A_k).$$

Необходимо принять во внимание также тот факт, что некоторые из узлов $1, 2, \dots, M$ являются общими для нескольких элементов и что вклад каждого элемента должен учитываться в выражении для функции φ относительно величин A_1, A_2, \dots, A_m неизвестной в этих узлах.

В результате необходимо найти оптимум величины φ во всей области с учетом того, что частные производные φ относительно величин A, A_1, \dots, A_m одновременно обращаются в нуль $\frac{d\varphi}{du_i} = 0$.

В результате задача сводится к решению системы из m алгебраических уравнений с m неизвестными, в результате чего определяются значения величины A_1, A_2, \dots, A_m в узлах сетки. Правые части этих уравнений получаются исходя из той части функционала, которая содержит в себе члены, характеризующие источники, или на основе значений A , заданных на границе области.

Общим достоинством конечно-элементных систем является то, что их матрица имеет ленточный характер, т.е. содержит много нулевых элементов. Это обстоятельство позволяет успешно решать системы очень больших порядков (из нескольких сотен или тысяч уравнений). Для этой цели были созданы специальные методы решения систем алгебраических уравнений [227-229].

Другим достоинством МКЭ является возможность естественным образом выполнять учет граничных условий, и получать значения искомых функций сразу во всей области течения. Однако самое важное то, что МКЭ - универсальный метод, который возможно применять к решению не только задач теории упругости, но для решения самых разнообразных задач гидродинамики, в том числе как для расчетов вихревых течений идеальной жидкости, так и течений вязкой жидкости, как стационарных, так и нестационарных [72, 230-232].

3.3.3 Метод контрольных объемов

Метод контрольного объема получил широкое распространение после появления знаменитой книги С. Патанкара [221].

Идея метода заключается в том, что исходная расчетная область представляется в виде набора типовых элементов (тетрагональных или призматических), причем каждая узловая точка содержится в одном контрольном объеме, после чего интегрирование ведется по каждому выделенному конечному объему. Для вычисления интегралов используются кусочные профили, которые описывают изменение искомой функции между узловыми точками. В результате записывается дискретный аналог исходного дифференциального уравнения переноса, в который входят значения искомой функции в нескольких смежных узловых точках. Полученный подобным образом дискретный аналог обладает свойством консервативности, т.е. выражает законы сохранения для конечного контрольного объема, также как и исходное дифференциальное уравнение выражает законы сохранения для бесконечно малого контрольного объема. Это, а также простота программной реализации привели к тому, что МКО на сегодняшний день является ведущим методом дискретизации при решении задач вычислительной гидродинамики. В частности, расчетный комплекс FLUENT® основан именно на нем [220]. То есть даже на грубых расчетных сетках, можно ожидать получение физически правдоподобных решений, удовлетворяющих интегральным балансам.

Общий алгоритм МКО можно представить следующим образом:

1. Разбивка расчетной области на конечное число непересекающихся объемов, при этом каждая узловая точка содержится в одном контрольном объеме;
2. Интегрирование исходного дифференциального уравнения по каждому контрольному объему, причем для вычисления интегралов используются кусочно-непрерывные аппроксимации, описывающие изменение искомой функции Φ между узловыми точками или в пределах контрольного объема. Таким образом, обеспечивается консервативность схемы.
3. Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений.

На основе обобщенного уравнения переноса (3.18) для произвольного контрольного объема V можно записать:

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_V \rho \phi dV + \oint_A \rho \phi \bar{u} \cdot d\bar{A} = \oint_A \Gamma_\phi \bar{\nabla} \phi dA + \oint_V S_\phi dV,$$

здесь ρ - плотность жидкости, u - вектор поступательной скорости, $\bar{A} = A \bar{n}$ - вектор, перпендикулярный к площадке A , \bar{n} - вектор внешней нормали.

Это уравнение записывается для каждого контрольного объема в расчетной области. В результате дискретизации получается следующее:

$$\frac{1}{\Delta t} \left[(\rho \phi)^{t+\Delta t} - (\rho \phi)^t \right] \Delta V + \sum_{f=1}^{N_f} \rho_f \phi_f \bar{u}_f \cdot \bar{A}_f = \sum_{f=1}^{N_f} \Gamma_\phi (\bar{\nabla} \phi)_n \cdot \bar{A}_f + S_\phi V,$$

где f - текущая грань ячейки; N_f - количество граней, ограничивающих ячейку; $\rho_f \phi_f \bar{u}_f \cdot \bar{A}_f$ - массовый расход жидкости через грань f ; $|A_f|$ - площадь грани f ; $(\bar{\nabla} \phi)_n$ - проекция градиента величины ϕ на внешнюю нормаль к грани f ; V - объем ячейки. Источниковый член часто представляется в линеаризованной форме $S = S_C + S_{Pf}$.

Значение приближенного решения для величины ϕ определяется в центре контрольного объема, следовательно, величина ϕ_f , переносимая конвекцией через грань f , необходимая для расчета конвективного члена должна быть интерполирована на грань ячейки, для чего используется схема разностей против потока (upwind scheme). В результате использования данной схемы дискретизации можно получить запись дискретного аналога в явном или неявном виде.

Поскольку в методе МКО дискретный аналог выводится путем интегрирования исходного дифференциального уравнения по контрольному объему, то можно предполагать, что свойства, которыми обладает исходное уравнение, будут соблюдаться в целом по контрольному объему. Это означает, что можно ожидать, что даже на грубой сетке, решение будет физически правдоподобно, т.е. будут соблюдаться интегральные свойства сохранения. Такие схемы называются консервативными.

3.4 Схемы аппроксимации уравнений переноса

Основное место среди схем аппроксимации уравнений переноса занимают схемы первого и второго порядка. В частности для уравнений переноса количества движения и параметров турбулентности схемы третьего порядка, такие как QUICK и MUSCL, и схема степенного закона («Power Law»), для расчета давлений – PRESTO!, и др. Очевидно, что от надлежащего выбора схемы дискретизации во многом зависит точность и сходимость решения задачи [233].

сетки по ее значению в одном из соседних: $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x}$, i – номер узла, расстоя-

нием между узлами. Такая схема позволяет получать качественно правдоподобные решения, которые подвержено так называемой «численной диффузии» [234], потому рекомендуется для выполнения начальных приближений.

При использовании схемы второго порядка точности, значение искомой функции на грани ячейки расчетной сетки вычисляется следующим образом:

$$\Phi_f = \Phi + \nabla \Phi \cdot \Delta s,$$

где Φ и $\nabla \Phi$ – значение функции в центре ячейки и ее градиент в ячейке вверх по потоку, Δs – вектор смещения с грани, расположенной выше по потоку. Эта формулировка требует определения градиента $\nabla \Phi$ в каждой ячейке. Градиент определяется таким образом:

$$\nabla \Phi = \frac{1}{V} \sum_f \tilde{\Phi}_f \vec{A}.$$

Значение функции на грани ячейки $\tilde{\Phi}_f$ рассчитывается как среднее значений на двух соседних гранях.

Схема со степенным законом фактически является разновидностью схемы первого порядка, и может с успехом применяться для большинства задач конвекции и диффузии, однако все же рекомендуется к использованию в качестве первого приближения [220].

Схема MUSCL (Монотонная Противопоточная Схема для Закона Сохранения) была предложена Bram van Leer [235], имеет третий порядок точности и обеспечивает уменьшение осцилляций решения (TVD) по сравнению с другими схемами такого рода. Это обеспечивает высокую точность численного решения дифференциальных уравнений в частных производных с учетом возможных разрывов и больших градиентов. Основная идея подхода заключается в замене кусочно- постоянной аппроксимации, определенной на множестве конечных элементов, осредненным значением на предыдущем временном слое. Для каждой ячейки величина отклонений значений ограничена, а значения, полученные в узле справа и слева используются для получения потока через границы ячейки сетки.

Схема третьего порядка QUICK детально разобрана в работе [150]. Несмотря на трудности со сходимостью данная схема обеспечивает высокое качество решения даже при моделировании сложных течений. Серьезным ее ограничением является требование, чтобы линии сетки были сонаправлены линиям тока.

Для численного решения уравнений переноса количества движения поле гидродинамических давлений должно быть, задано или каким-то образом найдено. Если при решении использовать неверное поле давления, найденное поле скорости не будет удовлетворять уравнению неразрывности. Процедура, разработанная для коррекции поля течения, получила название SIMPLE (ПолуЯвный Метод для Связанных Уравнений Давления) [221].

Если проинтегрировать уравнение неразрывности по некоторому контрольному объему вокруг расчетного узла P (Рис. 6), то в результате получается следующее уравнение:

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^0) \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} + [(\rho u)_e - (\rho u)_w] \Delta x \Delta z + [(\rho v)_n - (\rho v)_s] \Delta z \Delta x + [(\rho w)_t - (\rho w)_b] \Delta x \Delta y = 0$$

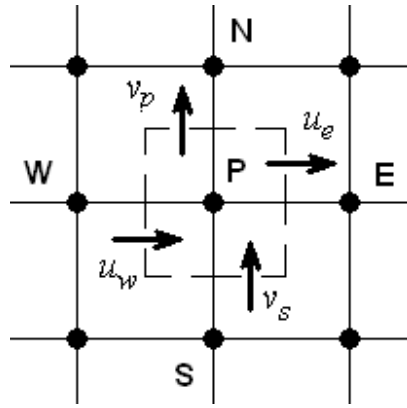


Рис. 6. Пример построения контрольного объема

При этом предполагалось, что во всем контрольном объеме плотность постоянна и равна ρ_P , значение массовой скорости на всей грани контрольного объема определяется значением составляющей скорости u_e в точке E. Опираясь на неявное представление уравнений можно записать

следующее соотношение для сеточных значений p' :

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + a_T p'_T + a_B p'_B + b,$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_E &= \rho_e d_e \Delta y \Delta z; & a_W &= \rho_w d_w \Delta y \Delta z; & a_N &= \rho_n d_n \Delta z \Delta x; \\ a_S &= \rho_s d_s \Delta z \Delta x; & a_T &= \rho_t d_t \Delta x \Delta y; & a_B &= \rho_b d_b \Delta x \Delta y; \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B; \end{aligned} \right\}$$

$$b = \frac{(\rho_P^0 - \rho_P) \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} + [(\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e] \Delta y \Delta z + [(\rho v^*)_s - (\rho v^*)_n] \Delta z \Delta x + [(\rho w^*)_b - (\rho w^*)_t] \Delta x \Delta y$$

Так как значения плотности ρ определены, вообще говоря, в узловых точках основной сетки, ее значения на границах, такие, как ρ_e , можно рассчитать с помощью подходящей интерполяции.

Независимо от применяемого способа интерполяции значения ρ_e для двух контрольных объемов, имеющих общую грань, должны быть согласованы между собой.

Можно видеть, что член b уравнения для поправки давления по существу равен (со знаком минус) левой части дискретного аналога уравнения неразрывности, записанного через значения составляющих скорости с индексом *. Равенство $b=0$ означает, что эти составляющие вместе с имеющимся значением $(\rho^0_{\bar{p}} \rho_p)$ удовлетворяют уравнению неразрывности и не требуется ника-

кой коррекции давления. Таким образом, член представляет собой «источник массы», который должен быть скомпенсирован поправками давления (через соответствующие поправки скорости).

Технически процедура SIMPLE состоит из следующих этапов:

1. Задается начальное приближение для поля давления p^* ;
2. Производится решение уравнений движения, в результате чего определяются u^*, v^*, w^* ;
3. Вычисляется поправка давления p' ;
4. Корректируется поля скоростей и давлений;
5. Выполняется решение дискретных аналогов для других искомых величин (таких, как температура, концентрация и параметры турбулентности), если они влияют на поле течения через физические свойства жидкости, источниковые члены и т. д. (если какое-то определенное Φ не влияет на поле течения, лучше рассчитать его после получения сходимости решения для поля течения).
6. Представление скорректированного давления p как нового p^* , возвращение к пункту 2 и повторение всей процедуры до тех пор, пока не будет получено сходящееся решение.

Процедура SIMPLEC отличается от SIMPLE только способом вычисления коэффициентов уравнения для поправки давления.

В процедуре PISO первая часть совпадает с пунктами 1-4 процедуры SIMPLE. После выполнения 4-го пункта процедуры SIMPLE поле скорости может не удовлетворять уравнению количества движения. Поэтому проводится еще одна коррекция так, чтобы скорректированные поля скорости и давления удовлетворяли линеаризованному уравнению количества движения и уравнению неразрывности [220].

В группе методов, к которой относятся SIMPLE, SIMPLEC, PISO, давление рассчитывается в результате последовательности поправок относительно начального приближения, которые вычисляются из условия выполнения уравнения неразрывности.

При отсутствии условия выполнения уравнения неразрывности для аппроксимации уравнений переноса величины может быть использована модель AVLSMART [236], основывающаяся на схеме третьего порядка QUICK.

Из уравнений движения несжимаемой жидкости следует, что поле давления не имеет предис-
тории и мгновенно реагирует на изменение полей вектора скорости и массовой силы.

Следует отметить, что для стационарных задач решения, полученные по каждому из рассмотренных методов, между собой ничем не отличаются, поскольку решаются одни и те же разностные уравнения. Различия проявляются только в скорости сходимости (количество итераций необходимых для достижения заданной погрешности решения по отношению к решению, полученному на предыдущей итерации) и устойчивости итерационного процесса (способность получать сходящееся решение при минимальных значениях параметров релаксации). SIMPLEC и PISO, как улучшенные варианты процедуры SIMPLE, обладают более высокой скоростью сходимости.

3.5 Моделирование влияния свободной поверхности жидкости

В решении задач о движении объектов по свободной поверхности жидкости необходимо производить учет влияния границы раздела сред, так как такие физические явления как ,например, волнообразование при движении морских объектов, оказывают значительное влияние на действующие силы и моменты, возникающие на теле. Среди множества моделей для пространственного описания многокомпонентных потоков наиболее всего подходит модель жидкости в ячейках (Volume Of Fluid). Эта модель предназначена для расчета взаимодействия многокомпонентных не перемешивающихся жидкостей, и позволяет отследить изменение межфазовых границ между фракциями смеси. В том числе данная модель применима в случае двух сред с границей раздела. VOF модель применяется совместно с моделями турбулентности, описанными ранее, и используется для получения вида границы раздела сред.

Важным условием работы данной модели является четкость границы раздела исследуемых сред, что означает значительную разницу плотностей. Таким образом, VOF модель ограничивает круг решаемых задач, но остается адекватной для задач движения тел по свободной поверхности жидкости.

В VOF-модели для представления каждой фракции вводится дополнительная переменная, обозначающая содержание данной фракции (среды) в расчетной ячейке. Сумма всех переменных в пределах конечного объема равна 1.

Теплофизические свойства жидкости, используемые в уравнениях неразрывности и импульса, определяются с учетом всех фракций жидкости, присутствующих в расчетном элементе. Одну газовую фракцию решатель программы позволяет назначить сжимаемой, т.е. ее плотность будет зависеть от температуры и давления среды. Уравнения неразрывности в VOF-модели [237] применяются для каждой из фракций жидкости.

Рассмотрим структуру уравнения на примере двухфазной среды.

Уравнение неразрывности для q-фазы:

$$\frac{\partial(p_q \alpha_q)}{\partial t} + \nabla(p_q \alpha_q \vec{v}) = S_{\alpha_q} + \sum_{p=1}^n (m_{pq} - m_{qp})$$

Явная схема дискретизации уравнения неразрывности по времени

$$\frac{(p_q \alpha_q)^{n+1} - (p_q \alpha_q)^n}{\partial t} + \sum_{nb} \nabla(p_q \alpha_q \vec{v})^n = \left[S_{\alpha_q} + \sum_{p=1}^n (m_{pq} - m_{qp}) \right]^n$$

α_q —массовая доля q-фазы в расчетной ячейке;

$\alpha_q = 0$ расчетная ячейка не содержит q-фазу;

$\alpha_q = 1$ расчетная ячейка полностью заполнена q-фазой;

$0 < \alpha_q < 1$ расчетная ячейка содержит смесь двух фаз.

Неявная схема дискретизации уравнения неразрывности по времени.

$$\frac{(p_q \alpha_q)^{n+1} - (p_q \alpha_q)^n}{\partial t} + \sum_{nb} \nabla(p_q \alpha_q \vec{v})^{n+1} = \left[S_{\alpha_q} + \sum_{p=1}^n (m_{pq} - m_{qp}) \right]^n$$

Уравнение импульса в VOF-модели применяется для описания всех фракций жидкости одновременно, и теплофизические свойства, используемые в уравнении, определяются аналогично выражению для определения плотности среды.

Большинство свободных течений жидкости являются неустановившимися, следовательно возникает зависимость от времени и необходимо определить схему дискретизации по времени. Выбор явной или неявной схемы определяет подход к дискретизации по времени уравнения неразрывности.

Явная схема обеспечивает отсутствие численной диффузии, но требует большое количество шагов по времени, как правило, используется на неструктурированных сетках. Обоснованным, можно считать применение данной схемы при расчете задач, где важен учет сил поверхностного натяжения на границе раздела двух сред, так как учитывает значительные изменения формы свободной поверхности. Однако, явная схема дискретизации на сетках среднего качества, а так же при условии сжимаемости одной из сред, значительно увеличивает время расчета и замедляет сходимость.

Неявная схема может использоваться на больших шагах по времени (отсутствие ограничений по числу Куранта) и чаще всего применяется в случае низкого качества сетки и для сложных течений (сжимаемых сред). К недостаткам данной схемы следует отнести возникающую численную диффузию, которая ухудшает качество определения сил поверхностного натяжения на свободной поверхности.

Для устранения проблемы численной диффузии, схема аппроксимации уравнения переноса для количества величины (фракции) может быть BRICS, которая содержит алгоритм определения значения в расчетной ячейке с помощью аппроксимации значений соседних ячеек.

3.8 Алгоритм скользящих расчетных сеток

Для моделирования течения вязкой жидкости в условиях совместного движения нескольких тел необходимо использование нескольких сеточных областей - доменов и применение дополнительного алгоритма для обмена данными между границами области. К таким подходам относится алгоритм скользящих сеток. Для случая построения неструктурированной сетки внутри домена проблема передачи данных через несовпадающие границы требует интерполяции значений более высокого порядка точности. На примере реализации подхода в расчетном комплексе NUMECA FINE™/Marine, алгоритм вместо явной интерполяции, определяет на каждом временном шаге ячейки на границах доменов и осуществляет передачу значений количества величины между сеточными узлами и границами расчетной ячейки следующим образом (Рис.7):

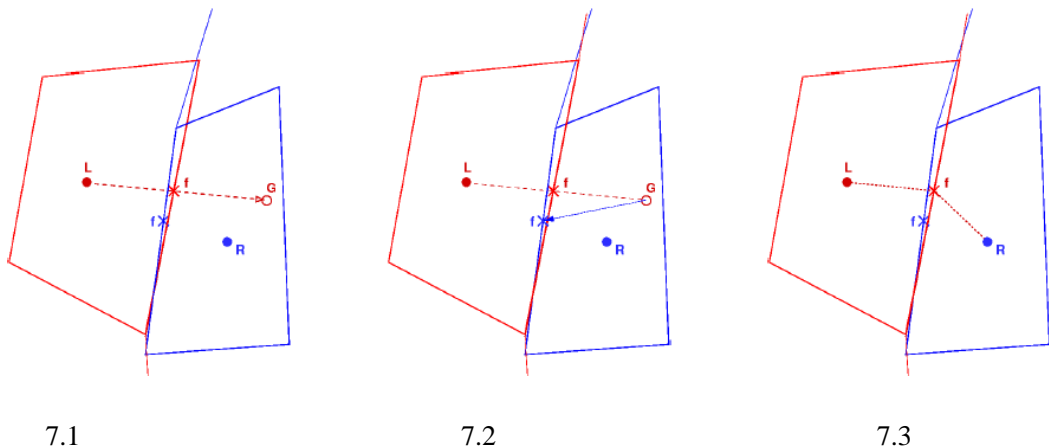


Рис. 7. Метод скользящих сеток: этапы передачи данных через подвижные границы ячеек численного домена.

Процедура имеет следующие основные этапы, согласно Рисунку 7:

7.1: определяются соседние ячейки на границах численного домена и сеточные узлы: домен 1: L; домен 2: R;

- в ячейке домена 2 создается временный новый узел (G) как нормальная проекция через границу ячейки домена 1. Временные узлы не используются в дальнейшем для процедуры интерполяции значений, они используются только для геометрической связи ячеек;

- в каждом домене определяются границы скользящих ячеек как наиболее близко расположенные к временным узлам (G);

7.2:

- вычисление значения величины через границу ячейки (f) 7.3:
- новое значение для узла (R) с учетом влияния значения величины в узле (L) при передаче данных через границу ячейки (f).

Процедура повторяется в двухстороннем порядке для ячеек каждого домена.

Интерполяция значений производится с помощью явного Метода обратных взвешенных расстояний (IDW) [238]. IDW использует измеренные значения вокруг интерполируемой границы. Наиболее близкие к проинтерполированному местоположению измеренные значения оказывают большее влияние на прогнозируемое значение величины, чем удаленные от него на значительное расстояние. IDW предполагает, что значение в каждом узле сетки оказывает локальное влияние, которое уменьшается с увеличением расстояния. Это придает больший вес значениям величины, расположенным ближе всего к интерполируемому местоположению. Вес точки уменьшается как функция от расстояния.

Граница расчетной ячейки как интерполируемая граница $\omega(X)$ при возможных n решениях $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ величины значения $u(X)$, зависящей от расстояния, как $v_t = u(X_t)$:

$$\omega(X) = \frac{\sum_1^n v_1 \varphi(r_1)}{\sum_1^n v_1(r_1)},$$

где взвешенная функция

$$\varphi(r) = r^{-c}$$

Здесь $r_1 = \|X - X_1\| \geq 0$ является расстоянием между соседними узлами сетки, c - степенной параметр.

С точки зрения точности решения на границах расчетной ячейки, необходимо учитывать особенности аппроксимации для уравнений переноса. Предположение, что во всем контрольном объеме плотность постоянна и равна ρ_p может быть не верно. Тогда для получения значений для массовой скорости t давлений на всей границе контрольного объема определяемое значением в расчётном узле, используется численный алгоритм и схема дискретизации предложенные в [239]. Схема аппроксимации для уравнений переноса в таком случае AVLSMART [236], дающая более точный результат для случая неструктурированных расчетных сеток при условии применения Гамма Разностной Схемы (GDS) приведенной в [240].

Список используемой литературы

1. Skejic R., Faltinsen O.M. A Unified Seakeeping and Maneuvering Analysis of Two Interacting Ships // Center of Ships and Ocean Structures, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway, pp. 209-218.
2. МППСС-72, Воениздат, 1974.
3. A.N. Cockcroft and J.N.F. Lameijer, A guide to the collision avoidance rules, Convention on the International Preventing Collisions at Sea (COLREG), IMO, 1972.
4. Чичерин И. А. Разработка метода расчета характеристик вязкого турбулентного течения жидкости около корпуса судна при наличии отрывных явлений // Дисс. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук., ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, 1999, — 117 с.
5. Пламмер К. Дж. Маневрирование судов в узкостях: Пер. с англ. — Л.: Судостроение, 1986.— 80 с., КБ-40-5-85 39.471.1.
6. Антонов В.А., Письменный М.Н. Теоретические вопросы управления судном. Учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. МГУ им. Адм. Г.И. Невельского, 2007. 78 с.
7. Лебедева М.П. Движение судов в стесненной акватории, обобщение и анализ материалов // Технический отчет, ГУМРФ им. Адм. С.О. Макарова, 2013, — 32 с.
8. Dand I.W. Some Measurements of Interaction between Ship Models Passing on Parallel Courses // National Maritime Institute, Report R108, 1981.
9. Ferguson A.M., Seren D.B., McGregor R.C., “Experimental investigation of grounding on a shoaling sandbank // Naval Architect, 1981, pp. 303-322.
10. Dand I.W., Ferguson A.M. The Squat of Full Ships in Shallow Water // Defense Technical Information Center, 1973 - 22 с.
11. Brix J. Manoeuvring Technical Manual, Seehafen Verlag GmbH, 1993, ISBN 3-87743-902-0.
12. Chung J.S. Interaction between Two Ships on a Parallel Course // M.S. Thesis, University of California, Berkeley, 1964.
13. Kaplan P., Sankaranarayanan, K. Hydrodynamic interaction of ships in shallow channels, including effects of asymmetry // International Conference on Ship Manoeuvrability, London, Paper No. 21, 1987.
14. Kijima K. Manoeuvrability of ships in confined water // International Conference on Ship Maneuverability, London, Paper No. 20, 1987.
15. Mizuno T. On the Interaction Effects between Ships under Way of Parallel Courses // Journal of Society of the Japan Society of Naval Architects and Ocean Engineers, No.110, 1961, pp. 1-7.

16. Müller E. Untersuchungen über die gegenseitige Kursbeeinflussung von Schiffen auf Binnenwasserstrassen // Schiff und Hafen, 19/6, 1967.
17. Newton R.N. Some notes on interaction effects between ships close aboard in deep water // 1st Symposium on Naval Maneuverability, Washington, DC, USA, 1960, pp. 1-24.
18. Remery G.F.M. Mooring Forces Induced by Passing Ships // Journal of the Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division, ASCE, Vol.101, 1974, pp. 247-258.
19. Wang S. Dynamic Effects of Ships Passage on Moored Vessels // Journal of the Waterways, Harbours and Coastal Engineering Division, ASCE Vol.101, 1975, pp 247-258.
20. Kijima K., Yasukawa H. Maneuverability of ships in narrow waterway // Journal of Society of Naval Architects of Japan. Vol. 23, 1985, pp. 25- 37.
21. Мастушкин Ю.М. Гидродинамическое взаимодействие судов при встречах и обгонах - Л., Судостроение, 1987. - 124 с.
22. Newton R. N. Some notes on interaction effects between ships close aboard in deep water // David Taylor Model Basin, Hydromechanics Laboratory, Washington D.C., Report 1461, 1969.
23. Norrbin N. Manoeuvring in confined waters: interaction phenomena due to side banks or other ships // 14th international towing tank conference, 1975.
24. Vantorre M., Laforce E., Verzhbitskaya E., Model tests based formulations of ship-ship interaction forces for simulation purposes // IMSF 28th Annual General Meeting, Genova, 2001.
25. Tuck E.O., Newman J.N. Hydrodynamic interactions between ships // 10th Symposium on Naval Hydrodynamics, Cambridge, Mass., 1974, pp. 35-70.
26. Pinkster J.A., Bhawsinka K. A Real-time simulation technique for ship-ship and ship-port interactions // 28th Int. Workshop Water Waves Floating Bodies, L'Isle sur la Aorgue, France, 2013.
27. Sutulo S., C. Guedes Soares, J. Otzen Validation of Potential-Flow Estimation of Interaction Forces // Journal of Ship Research, Vol. 56, No.3, 2012, pp. 129–145.
28. Dand I.W. Some measurements of Interaction induced by Surface – Piercing and Flooded Banks. - Feltham: National Maritime Institute, 1981 - 90 p.
29. De Maerschack, B.; Vanlede, J.; Dujardin, A.; Delgado, R.; Willems, M.; Eloot, K. Delft3D Zeebrugge model: Assessment tool for safety and accessibility studies within the framework of an integral approach // Flanders Hydraulics Research: Antwerpen, 2011, -35 p.
30. Басин А.М. Ходкость и управляемость судов - М.: Транспорт, 1968. - 255 с.
31. Соболев Г.В. Управляемость корабля и автоматизация судовождения - Л.: Судостроение, 1976. - 477 с.
32. Соболев Г.В., Управляемость корабля. – Л.: ЛКИ, 1959.-480 с.

33. Федяевский К.К., Соболев Г.В. Управляемость корабля. – Л.: Судпромиздат, 1963.-375 с.
34. Войткунский Я.И., Фадеев Ю.И., Федяевский К.К. Гидромеханика. – Л.: Судостроение, 1982. – с. 143.
35. Allen H.J. Pressure Distribution and Some Effects of Viscosity on Slender Inclined Bodies of Revolution. NASA, № 2044, 1950, pp. 414-420.
36. Гурьев Ю.В., Слуцкая М.З., Ткаченко И.В. Гидродинамические проблемы создания компьютерных тренажеров морских объектов и пути их решения // Сборник научных трудов Фундаментальная и прикладная гидрофизика, No 2 , УДК 532.517, 2008, с. 29-44.
37. Taylor D.W. Some model experiments on suction of vessels // Trans. Institution of Naval Architects and Marine Engineers, Vol.17, 1909, pp.1-21.
38. Opheim O. K. Experimental investigation of ship to ship interaction in lightering operations // Journal of Ship Research, No 21, 2005, pp. 157–164.
39. Lataire E., Vantorre M., Delefortrie G. Captive model testing for ship-to-ship operations // International Conference on Marine Simulation and Ship Manoeuvrability, 2009, pp. 1-10.
40. Vantorre M. Inleiding tot de maritieme techniek // Ghent University lecture notes, 2008/2009.
41. Thorenz C. Activities of PIANC Working Group 155: Ship Behaviour in Locks and Lock Approaches // 3rd International Conference on Ship Manoeuvring in Shallow and Confined Water, Ghent, 2013, pp. 99–102.
42. 27th ITTC MC final report, Proceedings of the 27th ITTC – Vol. I; Copenhagen, 2014, pp. 128-195.
43. Verwilligen J., Richter J., Reddy D., Vantorre M., Eloot, K. Analysis of Full Ship Types in High-Blockage Lock Configurations // MARSIM, 2012, Singapore, pp. 31-1 - 31-9.
44. Arslan T., Pettersen B., Visscher J., Muthanna C., Andersson H.I. A comparative study of PIV experiments and numerical simulations of flow fields around two interacting ships // 2nd International Conference on Ship Maneuvering in Shallow and Confined Water, NTNU, Trondheim, 2011, pp. 31–37.
45. Sano M., Yasukawa H., Kitagawa K., Yoshida S. Shallow Water Effect on the Hydrodynamic Interaction between Two Ships with Rudder in Close Proximity // 3rd International Conference on Ship Manoeuvring in Shallow and Confined Water, Ghent, Belgium, 2013, pp. 113–121.
46. Hicks W.M. On the motion of two cylinders in a fluid // Quarterly J Math, Vol. 16, 1879. pp. 113-140, 193-219.
47. Hicks W.M. On the motion of two spheres in Fluid // Phil. Trans. Of the Royal Soc. Vol. 171, 1880.
48. Lamb H. Hydrodynamics, Dover Pub. 1968.
49. Karal F.C., The motion of the sphere Moving parallel to a plane Boundary // Journal of Applied Physics, vol.24, N2, 1953.

50. Милн-Томсон Л.И. Теоретическая гидродинамика. -М. Мир, 1964, – с. 655.
51. Богословский А.М., Костюков А.А. Явление взаимного присасывания судов. –М., Морской транспорт, 1960, -с. 79.
52. Сабанеев В.С. Поперечное движение удлиненного эллипсоида вращения в жидкости, ограниченной плоской стенкой или свободной поверхностью // Прикладная механика (ЛГУ). 1975. - Вып.2. - с. 95-110.
53. Сабанеев В.С. О движении эллипсоида вращения в жидкости, ограниченной плоской стенкой // Вестник ЛГУ. 1958. - Вып. 3, № 13. -С. 48-53
54. Сабанеев В.С. Вращательное движение удлиненного эллипсоида вращения в жидкости ограниченной плоской стенкой или свободной поверхностью // Вестник ЛГУ. 1975. - Вып. 4, № 19. - С. 114-120.
55. Я.И., Фаддеев Ю.И. К вопросу об определении сил гидродинамического взаимодействия между судами.-Тр. ЛКИ, Вып. 104, 1976, с. 97-114.
56. Мاستушкин Ю.М. Управляемость промысловых судов - М.: Лег. и пищ. пром-ть, 1981. - 232 с.
57. Жуковский Н.Е. О присоединенных вихрях // Собр. соч, IV: Аэродинамика изд., 1949. - с. 69-91.
58. 23rd ITTC MC final report, Proceedings of the 27th ITTC – Vol. II Venice, 2002, - p.11.
59. Varyani K., McGregor R., Wold P. Empirical formulae to predict peak of forces and moments during interactions // Proceedings of the Hydronav'99 – Manoeuvring'99, Gdansk-Ostróda, Poland, 1999, pp. 338-349.
60. Tuck E.O. "Sinkage and trim in shallow water of finite width", Schiffstechnik, 14, 1967, pp. 92-94.
61. Kolkman, P.A. Ships meeting and generating current, Symposium on 'Aspects of Navigability of Constraint Waterways, including Harbour Entrances, Delft, 1978.
62. Tuck E.O., Taylor P.J. Shallow wave problems in ship hydrodynamics, // Proceedings of the Eighth Symposium on Naval Hydrodynamics, Pasadena, California, 1970, pp. 627–659.
63. Gronarz A. SIMUBIN – Modelling and simulation of realistic ship motions on inland waterways // DST, Report 1939, 2009.
64. Gronarz A. A new approach in modeling the interaction forces // 2nd International Conference on Ship Maneuvering in Shallow and Confined Water, NTNU, Trondheim, 2011.
65. Larsson L., Stern F., Visonneau M. A Workshop on Numerical Ship Hydrodynamics Proceedings. Vol. 2., Gothenburg, 2010, pp. 137-245.
66. Hess J.L., Smith A.M.O. Calculation of Nonlifting Potential Flow About Arbitrary Three- Dimensional Bodies // J. Ship Res. Vol. 8, 1964, pp. 22– 44.

67. Д.В. Никущенко Математическое моделирование движения подводного объекта на основе методов вычислительной гидродинамики // Дисс. на соиск. учен. степ. докт. техн. наук., СПбГМТУ, 2011, — 354 с.
68. Ткаченко И.В., Гурьев Ю.В., Козлов А.В. Численное моделирование обтекания выступающих частей подводных объектов // Моринтех-2003, С-Пб., 2003, с. 255-257.
69. Гурьев Ю.В., Никущенко Д.В. Опыт и перспективы использования компьютерных технологий для решения задач управляемости подводных объектов // НТК «XII Макеевские чтения», 2005, с. 21-26.
70. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD - La Canada, California: DWC Industries Inc., 1998. - 540 p.
71. Андерсон Д., Таннехилл Д., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. - М.: Мир, 1990. - 384 с.
72. Флетчер К. Вычислительные методы в механике жидкости - т. 1. - М.: Мир, 1991. - 504 с.
73. Liu G.-L., Guo J.-H., Da R.-T., Han J.-D. A variable domain variational finite element analysis of flow around pump-jet propellers // Second International Conference on Hydrodynamics, Balkema, Hong Kong 1996, pp. 83-88.
74. Jeong E., Girimaji S.S. Velocity-Gradient Dynamics in Turbulence: Effect of Viscosity and Forcing // Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Vol. 16, No 6, 2003, pp. 421-432.
75. Фриш У. Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова - М.: ФАЗИС, 1998. - 346 с
76. Saffman P.G. Dynamics of Vorticity // J.Fluid Mech., Vol. 106, 1981, pp. 49-58.
77. Kerwin J.E., Black S.D., Taylor T.E., Warren C.L. A Design Procedure for Marine Vehicles with Integrated Propulsors // Propellers/Shafting'97 Symposium, Virginia Beach, 1997, pp. 21-35.
78. Бесовский А.Р., Никуленко Д.В., Ткачук Г.Н. Численное моделирование обтекания с углами атаки системы "тело вращения - кольцевая насадка" // Проблемы мореходных качеств судов и корабельной гидромеханики, 39-ые Крыловские чтения. Тезисы докладов, НТО им. акад. А.Н. Крылова, С-Пб, 1999, с. 66-67.
79. Lout D., Mooch D., Weems K., Naive A. A numerical model of the flow around ship-mounted fin stabilizers // Int.Shipbuild.Progr., 2001, Vol. 48, No 1, pp. 19-50.
80. Chang C.C., Chern R.L. A numerical study of flow around an impulsively started circular cylinder by a deterministic vortex method // J.Fluid Mech., Vol. 233, 1991, pp. 243-263.
81. Гурьев Ю.В., Калинин О.С., Красиков В.И., Никущенко Д.В. Сравнительный анализ гидродинамических характеристик различных конструктивных схем кормового оперения современных ПЛ

- // "Проблемы эксплуатации вооружения, военной техники и подготовки инженерных кадров ВМФ", 2004.
82. Никущенко Д.В., Рогожина Е.А. Влияние рулей на гидродинамические характеристики оперения подводных аппаратов // Крыловские чтения, 2006, с. 67.
83. Новоселов В.Н. Использование метода дискретных вихрей для расчета пространственных тел // Материалы Юбилейной НТК, посвященной 100- летию СПбГМТУ, 1999, СПб., с. 129-135.
84. Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K. Method of Discrete Vortices - Boca Ration: CRC Press, 1993. -452 p.
85. Lifanov I.K. Singular Integral Equations and Discrete Vortices VSP, The Netherlands, 1996. - 474 p.
86. Sarpkaya T. Computational Methods with Vortices - The 1988 Freeman Scholar Lecture // Journal of Fluids Engineering, 1989, Vol. 111, pp. 5-52.
87. Lanchester F.W. Aerodynamics - London: Constable and Co., Ltd., 1907.
88. Prandtl L. Applications of modern hydrodynamics to aeronautics // NACA Rep, 1923. - 116p.
89. von Karman T. Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkorpern // Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institute an der Technischen Hochschule Aachen, No 6, 1927, pp. 1-17.
90. Гурьев Ю.В., Нефедьев В.Г. Численный метод расчета подъемной силы на трехмерных телах // Юбилейная научно-техн. конф. Сборник докладов, СПб. 1999, с. 135-139.
91. Сидоров О.П. Решение задачи об обтекании тела вращения // Тр.КАИ, 1958, No 38.
92. Белоцерковский С.М. Метод расчета подъемной силы тела вращения // Труды ЦАГИ, Вып. 869, 1963.
93. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения - М.: Янус-К, 2001. - 508 с.
94. Лифанов И.К., Полонский Я.Е. Обоснование численного метода дискретных вихрей решения сингулярных интегральных уравнений // ПММ, Вып. 39, No 4, 1975, с. 742-746.
95. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент - М.: ТОО "Янус", 1995. - 520 с.
96. Kerwin J.E., Taylor T.E., Black S.D., McHugh G.P. A Coupled Lifting- Surface Analysis Techinque for Marine Propulsors in Steady Flow // Propellers/Shafting'97 Symposium, Virginia Beach, 1997, pp. 20- 21.
97. Martinussen K., Ringen E. Manoeuvring prediction during design stage // CPMC Workshop 2000, Hamburg Ship Model Basin, 2000.
98. Li D-Q., Ottoson P., Trägårdh P. Prediction of bank effects by model tests and mathematical models // MARSIM'03, Kanazawa, Japan, August 25-28, 2003.

99. Silverstein, B L "Linearized Theory of the Interaction of Ships // Thesis, University of California at Berkeley, 1957, pp. 99-105.
100. Varyani K.S., Krishnankutty P., Vantorre M. Prediction of Load on Mooring Ropes of a Container Ship due to the Forces Induced by a Passing Bulk Carrier // International Conference on Marine Simulation and Ship Maneuverability, Vol.3, 2003, pp. 1-9.
101. Varyani K.S., Hamoudi B., McGregor R.C. Interactive forces between three ships in restricted waterways // Proceedings of the International Federation of Automatic Control Conference on Manoeuvring and Control of Marine Craft (MCMC), 1997, pp. 127- 133.
102. De Decker B Ship-Ship Interaction during Lightering Operations // M.Sc. thesis, Marine Technology Department, Faculty of Marine Engineering, Gent, Belgium, 2006, - 172 p.
103. Басин А.М. Устойчивость на курсе и управляемость самоходного судна - Л-М: Водный транспорт, 1939. - 205 с.
104. Басин А.М. Теория устойчивости на курсе и поворотливости судна - М- Л: Гос изд-во тех.-теор. лит-ры, 1949. - 228 с.
105. Васильев А.В. Управляемость судов - Л.: Судостроение, 1989. - 328 с.
106. Гофман А.Д. Движительно-рулевой комплекс и маневрирование судна. Справочник - Л.: Судостроение, 1988. - 360 с.
107. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа - М.: Наука, 1987. - 840 с.
108. Короткин А.И. Присоединенные массы судостроительных конструкций: Справочник - СПб.: Мор Вест, 2007. - 448 с.
109. Трешков В.К. Метод расчета нестационарных гидродинамических характеристик замкнутой несущей поверхности // Гидромеханика и теория корабля. Труды ЛКИ, 1980, с. 104-111.
110. Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей - М.: Физматлит, 1995. - 368 с.
111. Апарин В.А. Моделирование на ЭВМ сложного пространственного движения несущих поверхностей с развитием нестационарного вихревого следа // Труды ВВИА, No 1313, 1986, с. 200-222.
112. Апарин В.А., Дворак А.В. Метод дискретных вихрей с замкнутыми вихревыми рамками // Труды ВВИА, No 1313, 1986, с. 424-432.
113. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа - М.: Наука, 1965. - 244 с.
114. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа - М.: Наука, 1971. - 768 с.

115. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью - М.: Наука, 1978. - 352 с.
116. Дворак А.В. Невырожденность матрицы метода дискретных вихрей в задачах пространственного обтекания // Труды ВВИА, No 1313, 1986, с. 441- 453.
117. Зайцев А.А. Теория несущей поверхности: Математическая модель, численный метод, расчет машущего крыла - М.: Наука. Физматлит, 1995. - 160 с.
118. Saffman P.G. Dynamics of Vorticity // J.Fluid Mech., Vol. 106, 1981, pp. 49-58.
119. Ashley H., Widnall S., Landahl M.T. New Directions in Lifting Surface Theory // AIAA J., Vol. 3, No 1, 1965, pp. 3-16.
120. Beale J.T., Majda A. Vortex Methods II: Higher Order Accuracy in Two and Three Dimensions // Math.of Computation, Vol. 39 (159), 1982, pp. 29-52.
121. Fink P.T., Soh W.K. Calculation of Vortex Sheets in Unsteady Flow and Applications in Ship Hydrodynamics // Proc. of the 10th Symp. on Naval Hydro, Cambridge, 1974, pp. 463-488.
122. Leonard A. Computing Three-Dimensional Incompressible Flows with Vortex Elements // Annu.Rev.Fluid Mech., Vol. 17, 1985, pp. 523-559.
123. Lewis R.I. Vortex Element Methods for Fluid Dynamic - Analysis of Engineering Systems. - Cambridge University Press, 1991. - 588 p.
124. Saffman P.G., Baker G.R. Vortex Interactions // Annu.Rev.Fluid Mech., Vol. 11, 1979, pp. 95-122.
125. Sarpkaya T. Vortex Element Methods for Flow Simulation // Advances in Applied Mechanics, Vol. 31, 1994, pp. 113-247.
126. Sarpkaya T. Vorticity, Free Surface, and Surfactants // Annu.Rev.Fluid Mech., Vol. 28, 1996, pp.83-128.
127. Краус В. Панельные методы в аэродинамике / Численные методы в динамике жидкости. - М.: Мир, 1981. - с. 241-305
128. Archibald F.S. Unsteady Kutta Condition at High Values of the Reduced Frequency Parameter // J.Aircraft, Vol. 12, 1975, pp. 545-550.
129. Koumoutsakos P., Leonard A., Pepin F. Boundary Conditions for Viscous Vortex Method // J.Comput.Physics, Vol. 113, 1994, pp. 52-61.
130. Koumoutsakos P., Shiels D. Simulations of the viscous flow normal to an impulsively started and uniformly accelerated flat plate // J.Fluid Mech., Vol. 328, 1996, pp. 117-227.
131. Федяевский К.К. Теоретическое определение аэрогидродинамических характеристик тел вращения и трехосных эллипсоидов // Труды ЦАГИ, 1947, No 643, с. 6-18.

132. Федяевский К.К., Соболев Г.В. Управляемость корабля - Л.: Гос. союзное изд-во судостроительной промышленности, 1963. - 375 с.
133. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях - М.: Наука, 1975. - 424 с.
134. Трошков В.К. Метод расчета нестационарных гидродинамических характеристик замкнутой несущей поверхности // Гидромеханика и теория корабля. Труды ЛКИ, 1980, с. 104-111.
135. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях - М.: Наука, 1985. - 256 с.
136. Белоцерковский С.М. Метод численного решения пространственной задачи о диффузии вихрей // Труды ВВИА, Вып. 1313, 1986, с. 40-51.
137. Ништ М.И. Математические модели аэродинамики летательных аппаратов // Полет, No 8, 1999, с. 17-25.
138. Hess J.L., Martin R.P. Improved solution for potential flow about arbitrary axisymmetric bodies by the use of higher order surface source method, NASA, 1974.
139. Rubbert P.E., Johnson F.T. Advanced panel-type influence coefficient methods applied to subsonic flows // AIAA paper, 1975.
140. Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей - М.: Физматлит, 1995. - 368 с.
141. Белоцерковский С.М., Скобелев Б. Метод дискретных вихрей и турбулентность - Новосибирск: ИТПМ, 1993. - 38 с.
142. Белоцерковский С.М. О моделировании на ЭВМ турбулентных струй и следов методом дискретных вихрей // Ship Motions and Manoeuvrability - М.: Наука, 1994. - с. 246-248
143. Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Компьютерная концепция вихревой турбулентности // Изв.вузов.Нелинейная механика, 1995, Вып. 3, No 2, с. 72-93.
144. Скобелев Б., Шмагунов О.А. Проблема учета вязкости в методах дискретных вихрей // Вычислительные технологии, 2001. т. 6, ч. 2, с. 563-569.
145. Скобелев Б., Шмагунов О.А. Принципиальные трудности описания турбулентности уравнения Навье-Стокса и метод дискретных вихрей // ИН- ПРИМ-98, 1998, с. 122.
146. Cotel A.J., Breidenthal R.E. Turbulence inside a vortex // Physics of Fluids, 1999, Vol. 11, No 10, pp. 3026-3029.
147. Navier C.L.M.H. Memoire sur les lois du mouvement des fluides // Mem.Acad.Roy.Sci., Vol. 6, 1823, pp. 389-440.

148. Stokes G.G. On the steady motion of incompressible fluid // Transactions of Cambridge University Society, 1842, pp. 439-455.
149. Павловский В.А. Краткий курс механики сплошных сред - С-Пб.: СПбГТУРП, 1993. - 212 с.
150. Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости - Л.: Судостроение, 1989. - 256 с.
151. Сокольников И.С. Тензорный анализ - М.: Наука, 1971. - 376 с.
152. Temam R. Navier-Stokes Equations - Oxford: Elsevier Science Publishers B.V., 1984. - 526 p.
153. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости - М.: Физматлит, 1961. - 203 с.
154. Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость // УМН, 2003, Вып. 58, No 2, с. 45-78.
155. Юдович В.И. О проблемах современной математической гидродинамики // Успехи механики, 2002, Вып. 1, No 1, с. 51-102.
156. Fefferman, C. L., "Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation", Preprint, 2000.
157. Moffatt H.K., Kida S., Ohkitani K. Stretched vortices - the sinews of turbulence; large-Reynolds-number asymptotics // J.Fluid.Mech., Vol. 259, 1994, pp. 241-264.
158. Shafarevich A.I. Localized asymptotic solutions of the Navier-Stokes equations and topological invariants of vector fields. Prandtl-Maslov equations on reeb graphs and Fomenko invariants // Rus. J. of Mathematical Physics, Vol. 7, No 4, 2000, pp. 401-447.
159. Маслов В.П., Шафаревич А.И. Локализованные асимптотические решения уравнений Навье-Стокса и ламинарные следы в несжимаемой жидкости // ПММ, 1998, Вып. 62, No 3, с. 424-432.
160. Брэдшоу П. Турбулентность - М.: Машиностроение, 1980. - 344 с.
161. Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике - М: МГУ, 1999. - 232 с.
162. Chapman S., Cowling T.G. The mathematical theory of non-uniform gases, Third edition. - Cambridge: Cambridge University Press, 1995. - 423 p.
163. Елизарова Е.В., Калачинская И.С., Шеретов Ю.В., Шильников Е.В. Численное моделирование отрывных течений за обратным уступом // Прикладная математика и информатика, No 14, 2003, с. 85-118.
164. Елизарова Т.Г., Широков И.А. Численное моделирование ударной волны в аргоне, гелии и азоте // Прикладная математика и информатика, No 18, 2004, с. 66-82.
165. Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды - Тверь: Тверской гос. ун-т, 1997. - с. 127-155

166. Carrington M.E., Defu.H., Kobes R. Chapman-Enskog expansion of the Boltzmann equation and its diagrammatic interpretation // *Multiparticle dynamics*, 2001, pp. 215-219.
167. Гарбарук А.В. Современные полуэмпирические модели турбулентности для пристенных течений: тестирование и сравнительный анализ // Дисс. канд. физ.-мат. наук, СПбГТУ, 1999.
168. Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса - М: Наука, 1990. - 317 с.
169. Никущенко Д.В. Исследование течений вязкой несжимаемой жидкости на основе расчетно-го комплекса FLUENT - СПб.: Изд.СПбГМТУ, 2006. - 92с.
170. Orszag S.A., Patterson G.S Numerical simulation of three-dimensional homogenous isotropic turbulence // *Phys.Rev.Lett.*, Vol. 28, No 2, 1972, с. 76-79.
171. Шуманн У., Гретцбах Г., Кляйзер Л. Прямые методы моделирования турбулентных течений // *Методы расчета турбулентных течений* / Под ред. В.Кольмана - М.: Мир, 1984. - с. 103-226.
172. Никитин Н.В Прямое численное моделирование трехмерных турбулентных течений в трубах кругового сечения // *Изв.РАН.Мех.Ж и Г.*, No 6, 1994, с. 14-26.
173. Moin P., Mahesh K. Direct Numerical Simulation: a tool in turbulence research // *Annu.Rev.Fluid Mech.*, Vol. 30, 1998, с. 501-539.
174. Белоцерковский О.М., Опарин А.М. Численный эксперимент в турбулентности. От порядка к хаосу. - М.: Наука, 2000. - 223 с.
175. Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Четкин В.М. Турбулентность: новые подходы - М.: Наука, 2002. - 286 с.
176. Jimenez J. Computing high-Reynolds-number turbulence: will simulations ever replace experiments? // *J.of turbulence*, Vol. 4, No 22, 2003, с. 1-14.
177. Reynolds O. On the dynamical theory of turbulent incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // *Phil.Trans Royal Soc.*, Vol. 186, 1894, с. 123-161.
178. Павловский В.А., Новожилов В.В. Установившиеся турбулентные течения несжимаемой жидкости - С-Пб.: Изд. СПбГМТУ, 1998. - 484 с.
179. Prandtl L. Bericht uber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz // *ZAMM*, Vol. 5, 1925, pp.136-139.
180. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя - М.: Наука, 1969. - 742 с.
181. von Karman T. *Mechanische Ahnlichkeit und Turbulenz*, Stockholm, 1931, pp. 85-92.
182. Stanisic M.M. *The Mathematical Theory of Turbulence* - Berlin: Springer- Verlag, 1988. - 501 p.
183. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *Докл.АН СССР*, Вып. 30, No 4, 1941, с. 299-303.

184. Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв.АН СССР.Сер.физ., Вып. 6, No 1-2, 1942, с. 56-58.
185. Jones W.P., Launder B.E. The prediction of laminarisation with a 2-equation model of turbulence // Int.J.Heat Mass Transfer, Vol. 15, 1972, pp. 310-314.
186. Wilcox D.C. Turbulence Modelling for CFD - La Canada, California: DWC Industries Inc., 1998. - 540 p.
187. Menter F.R. Zonal two equation k- ω turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper, No 93-2906, 1993, p. 21-35.
188. Menter F.R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // AIAA J., Vol. 32, No 8, 1994, pp. 1598-1605.
189. Schmitt F.G., Merci B., Dick E., Hirsh C. Direct investigation of the k- transport equation for a complex turbulent flow // J.of turbulence, Vol. 4, No 21, 2003, pp. 1-21.
190. Никущенко Д.В., Павловский В.А. Реологическая модель для расчета течений жидкости при произвольных числах Рейнольдса // Вестн.С.- Петербург.ун-та.Сер.1., 2009, No 1. с. 104-112.
191. Yakhot V., Orzag S.A. Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory // Journal of scientific Computing, Vol. 1, No 1, 1986, pp. 1-51.
192. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique // Physics of Fluids, Vol. A4, No 7, 1992, pp. 1510- 1520.
193. Smith L.M., Woodruff S.L. Renormalization group analyzes of turbulence // Annu.Rev.Fluid Mech., Vol. 11, No 6, 1998, pp. 275-310.
194. Yakhot V., Smith L.M. The renormalization group, the ϵ -expansion, and derivation of turbulence models // Journal of scientific Computing, Vol. 7, 1992, pp. 35.
195. Eyink G.L. The renormalization group and operator-product expansion in turbulence: shell-models // Phys.Rev.E., Vol. 48, 1993, pp. 1823-1835.
196. Секундов А.Н. Модель турбулентности для описания взаимодействия пограничного слоя с крупномасштабной турбулентностью // Изв.РАН.Мех.Ж и Г., No 2, 1997, с. 59-68.
197. Menter F.R. Eddy viscosity transport equations and their relation to the k- ϵ model // Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME, Vol. 119, 1997, pp. 876-884.
198. Axel L.B., Liungman O.A. A one-equation turbulence model for geophysical applications: comparison with data and k- ϵ model // Environ.Fluid.Mech., Vol. 1, 2001, pp. 71-106.
199. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // La Rech.Aerospatiale, Vol. 1, 1994, pp. 5-21.

200. Никущенко Д.В., Павловский В.А., Шестов К.В. Расчет течения вязкой несжимаемой жидкости на основе единой ламинарно - турбулентной модели // 4-я международная конференция по морским интеллектуальным технологиям Моринтех - 01, 2001.
201. Никущенко Д.В., Павловский В.А. Реологическая модель для расчета течений жидкости при произвольных числах Рейнольдса // Вестн.С.- Петербург.ун-та.Сер.1., 2009, No 3, с. 104-112.
202. Speziale C.G., Sarkar S., Gatski T.B. Modeling the Pressure-Strain Correlation of Turbulence // J.Fluid Mech., Vol. 227, 1991, pp. 245-272.
203. L'vov V., Pomyalov A., Tiberkevich V. Multizone shell model for turbulent wall bounded flows // Phys.Rev.E., Vol. 68, 2003.
204. Biferale L. Shell models of energy cascade in turbulence // Annu.Rev.Fluid Mech., Vol. 35, 2003, pp. 441-468.
205. Bohr T., Jensen M.H., Paladin G., Vulpiani A. Dynamical systems approach to turbulence - Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
206. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика - т. 1. - С-Пб.: Гидрометеиздат, 1992. - 694 с.
207. Lilly D.K. On the application of the eddy viscosity concept in the inertial sub-range of turbulence, National Center for Atmospheric Research, NCAR-123, Boulder, Colorado, 1966.
208. Piomelli U. Large-eddy simulation of turbulent flows // Advances in Turbulence Modelling. Lecture Series 1998-05, Von Karman Institute for Fluid Dynamics. 1998, pp. 1-54
209. Deardorf J.W. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers // J.Fluid Mech., Vol. 41, 1970, pp. 453-465.
210. Leonard A. Energy cascade in large-eddy simulation of turbulent fluid flows // Adv.Geophys., Vol. 18A, 1974, pp. 237-248.
211. Piomelli U., Balaras E. Wall-layer models for large-eddy simulations // Annu.Rev.Fluid Mech., Vol. 34, 2002, pp. 349-374.
212. Horiuti K. Roles of non-aligned eigenvectors of strain rates and subgrid-scale tensors in turbulence generation // J.Fluid Mech., Vol. 491, 2003, pp. 65-100.
213. McComb W.D., Watt A.G. Conditional averaging procedure for the elimination of the small-scale modes from incompressible turbulence at high Reynolds numbers // Phys.Rev.Lett., Vol. 65, No 26, 1990, pp. 3281-3284.
214. Mouri H., Hori A., Kawashima Y. Vortex tubes in velocity fields of laboratory isotropic turbulence: dependence on the Reynolds number // Phys.Rev.E., Vol. 57, No 1, 2003.

215. Burgers J.M. Mathematical model illustrating the theory of turbulence // *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 1, 1948, pp. 171-199.
216. Lundgren T.S. Strained vortex model for turbulent fine structure // *Physics of Fluids*, Vol. 25, No12, 1982, pp. 2193-2203.
217. Ferziger J.L., Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics* Springer-Verlag, 2002. - 423 p.
218. Menter F.R., Egorov Y. Turbulence models based on the length-scale equation // *Fourth International Symposium on Turbulent Shear Flow Phenomena*, 2004, pp. 263-268.
219. NUMECA FINETM/Marine v3.1 Техническая документация: Numeca Int., 2013.
220. FLUENT User's Guide. Lebanon: Fluent Inc, 2003.
221. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости - М.: Энергоатомиздат, 1984. - 152 с.
222. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем - М.: Наука, 1969, - 553 с.
223. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике (вычислительный эксперимент) - М.: Наука, 1982. - 391 с.
224. Tseng Y.-H., Ferziger J.H. A ghostcell immersed boundary method for flow in complex geometry // *J.Comp.Physics*, Vol. 192, 2003, pp. 593-623.
225. Brown D.L., Cortez R., Minion M.L. Accurate Projection Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations // *J.Comp.Physics*, Vol. 168, 2001, pp. 464-499.
226. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация - М.: Мир, 1986. - 318 с.
227. Knabner P., Angermann L. Numerical methods for elliptic and parabolic partial differential equations - N-Y.: Springer-Verlag, 2003. - 424 p.
228. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. - 632 с.
229. Турчак Л.И. Основы численных методов - М.: Наука, 1987. - 320 с.
230. Коннор Д., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости - Л.: Судостроение, 1979. - 264 с.
231. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов - М.: Наука, 1989. - 288 с.
232. Шахверди Г.Г. Ударное взаимодействие судовых конструкций с жидкостью - СПб.: Судостроение, 1993. - 256 с.
233. Best Practice Guidelines for Marine Applications of Computational Fluid Dynamics, prepared by WS Atkins Consultants and members of the NSC [Электронный ресурс]. - 2005. - Режим доступа: <http://pronet.wsatkins.co.uk/marnet/guidelines/guide.html>, свободный

234. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы: Введение в теорию - М.: Наука, 1977. - 439 с.
235. van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second-order sequel to Godunov's method // J.Com.Phys., Vol. 135, No 2, 1997, pp. 229-248.
236. Przulj V., Basara B. Bounded convection schemes for unstructured grids // 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, AIAA paper 2001-2593, 2001.
237. Ferziger J.H., Peric M., Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer-Verlag, 2002.
238. Moise A., Kinnia C. Sliding grid interpolation for Navier Stokes Simulations // MSc Computational Mechanics Report, Ecole Centrale de Nantes, Swansea University, 2012, -p. 50.
239. Queutey P.V.M. An interface capturing method for free-surface hydrodynamic flows // Computers & Fluids, Vol. 36, No. 9, 2007, pp.1481-1510.
240. Jasak H., Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows // PhD thesis, University of London, 1996, -p.362.
241. Nobuaki Sakamoto, Wilson R.V., Stern F., 'Reynolds-Averaged Navier-Stokes Simulations for High-Speed Wigley Hull in Deep and Shallow Water // Journal of Ship Research, Vol.51, No 3, 2007, pp. 187-203.
242. 18th International Towing Tank Conference -ITTC 87 // Proceedings, Vol. 2. SNAJ, 1987.
243. STAR-CCM+5.06 Техническая документация, CD-Adapco, 2013.
244. Farrell P.A., Hegarty A.F., Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I. Robust computational techniques for boundary layers // Boca Raton: CRC Press, 2000. -p. 245.
245. Vantorre M.; Laforce E; Verzhbitskaya E. Model test based formulations of ship-ship interaction forces // Ship Technology Research Vol. 49, 2002.
246. Sutulo S., C. Guedes Soares Simulation of the Hydrodynamic Interaction Forces in Close- Proximity Manoeuvring // Proceedings of the 27th Annual International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE 2008), Estoril, 2008.
247. Varyani K.S., Thavalingam A., Krishnankutty P. New generic mathematical model to predict hydrodynamic interaction effects for overtaking manoeuvres in simulators // J Mar Sci Technol, 2004, pp 2431.
248. Fonfach J.M.A., Sutulo S., Guedes Soares C. Numerical study of ship-to-ship interaction forces on the basis of various flow models // Proceedings of the 2nd International Conference on Ship Manoeuvring in Shallow and Confined Water: Ship to Ship Interaction, 2012.
249. Павловский В.А., Никущенко Д.В. К выводу уравнений движения подводного аппарата // Вестн. С.-Петербург ун-та. Сер.10, No 2, 2007, с. 60-64.
250. Hirano M, On the Calculation Method of Ship Maneuvering Motion at the Initial Design Phase // Journal of the Society of Naval Architects of Japan, Vol. 147, 1980.